

Dagens ämnen

- Basbyte i linjära avbildningar
 - Basbytesformeln
- Noll- och värderum
- Sammansättningar av linjära avbildningar

Basbytesformeln

Sats 7.4.1. Låt $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ och $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ vara baser i vektorrummet $\mathbb{V}$, T en $n \times n$ -matris sådan att $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T$ och $F: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Om F har matrisen $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ i basen $\underline{\mathbf{e}}$ och $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$ så gäller att

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1} A_{\underline{\mathbf{e}}} T.$$

Läs **feT**-formeln i basbytesformeln

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T, \quad A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1} A_{\underline{\mathbf{e}}} T$$


Spåret av en matris/avbildning

Definition 7.4.4. Låt A vara en $n \times n$ -matris, $n \geq 2$. Spåret av A betecknas $\text{tr}A$ och definieras

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn},$$

d.v.s. spåret är *summan av A:s diagonalelement*.

Sats 7.4.6. Låt A, B vara $n \times n$ -matriser. Då gäller att

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

Sats 7.4.7. Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum, $\dim \mathbb{V} = n$ och $F: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ och $\underline{\mathbf{f}}$ vara baser i $\mathbb{V}$ samt $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ respektive $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ vara F 's avbildningsmatriser i baserna $\underline{\mathbf{e}}$ respektive $\underline{\mathbf{f}}$. Då gäller

$$\text{tr}A_{\underline{\mathbf{e}}} = \text{tr}A_{\underline{\mathbf{f}}}. \quad (7.4.5)$$

Definition 7.4.8. Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum, $\dim \mathbb{V} = n$ och $F: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Då definieras *spåret av F* som spåret av en avbildningsmatris till F .

Nollrum och värderum

Definition 7.5.1. Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Då definieras *nollrummet* $N(F)$ och *värderummet* $V(F)$ till F som

$$N(F) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{U}: F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} \quad \text{respektive} \quad V(F) = \{F(\mathbf{u}) \in \mathbb{V}: \mathbf{u} \in \mathbb{U}\}.$$

Sats 7.5.2. Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Då gäller att

- (a) $N(F)$ är ett underrum av $\mathbb{U}$,
- (b) $V(F)$ är ett underrum av $\mathbb{V}$.

Beräkning av $N(F)$ och $V(F)$

- $N(F)$?
 - Lös $AX=0$ på vanligt sätt.
- $V(F)$?

Sats 7.5.4. Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och låt $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ vara en bas i $\mathbb{U}$. Betrakta en linjär avbildning $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$. Då gäller att

$$V(F) = [F(\mathbf{u}_1), \dots, F(\mathbf{u}_k)].$$

$V(F)$?

- Tänk på uppbyggnaden av avbildningsmatrisen!
- $F(\mathbf{e}_i)$:s koordinater är det som står i A :s kolonner.
- För att hitta bas i $V(F)$ behöver löjliga element strykas.
- Beroendeeckvationen för $V(F)$ blir $AX=0$ som ju redan är löst vid beräkning av $N(F)$.
- Slutligen, vill ha ekvationer för $V(F)$ till kontroll och utfyllnad, dvs vill lösa $AX=Y$.

$V(F)$

- Vi löser alltså ett ekvationssystem men tolkar det på tre olika sätt!
- **Se till att ni har koll på vilken ekvation ni jobbar med!!**

Dimensionssatsen

Sats 7.5.6. (Dimensionssatsen)

Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Antag att $\dim \mathbb{U} = n$. Då är

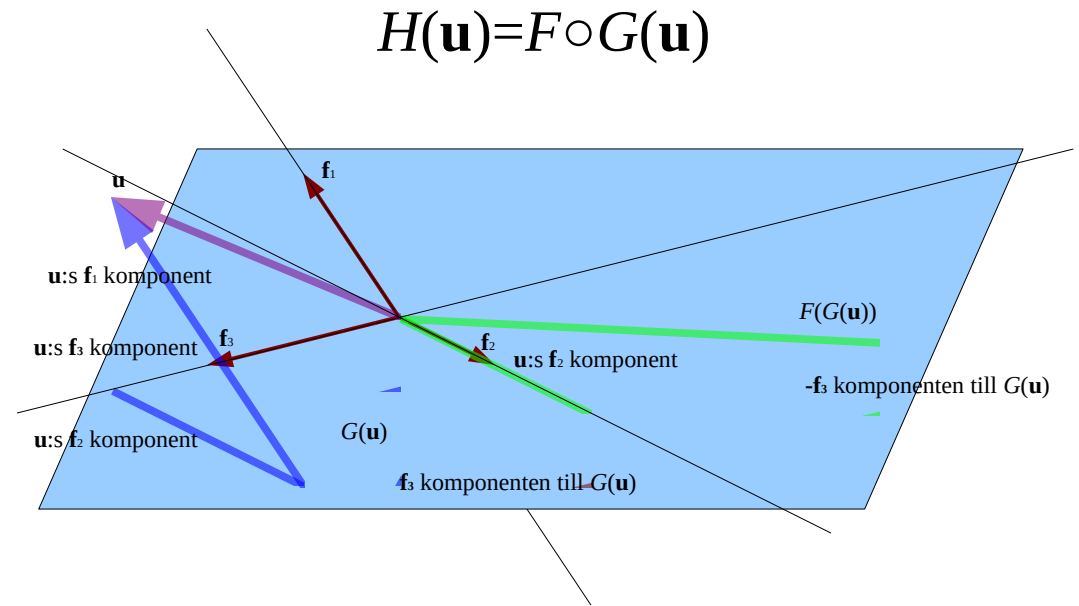
$$\dim N(F) + \dim V(F) = n.$$

Sammansatta avbildningar

Definition 7.6.1. Låt $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ och $\mathbb{W}$ vara vektorrum och $G: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$, $F: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ linjära avbildningar. Den *sammansatta avbildningen* $F \circ G: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$ definieras som

$$F \circ G(\mathbf{u}) = F(G(\mathbf{u})).$$

Sats 7.6.2. Låt $G: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ och $F: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ vara linjära avbildningar som i fixa baser i de ändligtdimensionella rummen $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ och $\mathbb{W}$ beskrivs av matriserna B respektive A . Då är avbildningen $F \circ G: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$ linjär och dess matris, relativt baserna i $\mathbb{U}$ och $\mathbb{W}$, är AB .



Potenser av linjära avbildningar

Sats 7.6.4. Låt $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$, $\dim \mathbb{U} < \infty$. Om $N(F) \cap V(F) = \{\mathbf{0}\}$ så gäller för alla heltal $n \geq 2$ att

$$N(F^n) = N(F), \quad V(F^n) = V(F).$$