

REGELMÄSSIGE
SCHNITTE UND PROJECTIONEN

DES HUNDERTZWANZIGZELLES UND SECHSHUNDERTZELLES

IM

VIERDIMENSIONALEN RAUME

VON

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

(DEEL II. N^o. 7.)

(Mit sieben Tafeln und drei Tabellen).

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1894.

REGELMÄSSIGE
SCHNITTE UND PROJECTIONEN
DES HUNDERTZWANZIGZELLES UND SECHSHUNDERTZELLES
IM VIERDIMENSIONALEN RAUME

VON

P. H. S C H O U T E .



I. COORDINATENSTELLUNG DES Z_a^{600} .

1. Schon vor zehn Jahren hat Dr. A. PUCHTA die Coordinaten der 120 Eckpunkte des Z^{600} berechnet (*Wiener Sitzungsberichte*, Bd. 89, S. 817). Deshalb würde ich das zu der Bestimmung der Schnitte und Projectionen dieses Zelles notwendige Material aus seiner Arbeit haben schöpfen können. Ich ziehe es aber vor ein von der PUCHTA'schen Methode ganz verschiedenes Verfahren zu veröffentlichen, das sich in der Anwendung viel übersichtlicher gestaltet, indem es der mühseligen Auswertung der Coordinaten der individuellen Punkte umgehend das ganze System dieser Coordinatenwerte fast wie in einem Schlage zu liefern im Stande ist. Es möge dieses Verfahren von der entsprechenden Betrachtung im dreidimensionalen Raume eingeleitet werden.

Bekanntlich bilden die in einen Eckpunkt P (Fig. 1) eines regelmässigen Ikosaeders zusammentreffenden Flächen die fünf Seitenflächen einer regelmässigen Pyramide. Ist die Seitenlänge des Ikosaeders a , so ist der Radius r des dem Pentagon ABCDE der Grundebene umgeschriebenen Kreises $\frac{2a}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$ und findet man für die Höhe PM der Pyramide und das Diameter PQ der dem Ikosaeder umgeschriebenen Kugel nach einander die Werte $\sqrt{a^2 - r^2} = \frac{2a}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ und $\frac{a^2}{PM} = \frac{1}{2} a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

G 1*

4 REGELMÄSSIGE SCHNITTE UND PROJECTIONEN DES 120-ZELLES

Wir erinnern hier an diese bekannten Sätze, weil sie uns das Mittel darbieten von einer Koordinatenstellung der Eckpunkte des regelmässigen Pentagons (Koordinatenanfang in M) zu einer Koordinatenstellung des Ikosaeders im Raume (Koordinatenanfang in der Mitte O von PQ) zu gelangen und ein ganz analoges Verfahren von der Koordinatenstellung des Ikosaeders zu jener des Sechshundertzelles Z_a^{600} führen kann.

2. Das Z_a^{600} wird von 600 Tetraedern eingeschlossen. In jeden Eckpunkt P' dieses Gebildes treten 20 dieser Tetraeder zusammen und die dem Punkte P' gegenüberliegenden Flächen dieser Tetraeder schliessen wieder ein regelmässiges Ikosaeder ein. Es beträgt die Entfernung P'M' zwischen P' und dem Centrum M' des Ikosaeders

$$\sqrt{a^2 - \frac{1}{16} a^2 (10 + 2\sqrt{5})} \text{ oder } \frac{1}{4} a (\sqrt{5} - 1) \text{ und das Diameter}$$

P'Q' der dem Z_a^{600} umgeschriebenen Hypersphere oder $\frac{a^2}{P'M'}$ hat die Länge $a(\sqrt{5} + 1)$.

3. Die Verwirklichung des angedeuteten Gedankens wird am leichtesten gelingen, wenn die ursprüngliche Koordinatenstellung des Ikosaeders möglichst symmetrisch gewählt wird. Deshalb beziehen wir das Ikosaeder (Fig. 2) auf eins der fünf von den Querlinien gebildeten rechtwinkligen Koordinatensysteme. Da der Radius der die Kanten des Ikosaeders in ihren Mitten berührenden Kugel

den Wert $\sqrt{\frac{1}{16} a^2 (10 + 2\sqrt{5}) - \frac{1}{4} a^2}$ oder $\frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1)$ hat,

finden wir für die Koordinaten der zwölf Eckpunkte (A, A_1, A_2, A_3) , (B, B_1, B_2, B_3) , (C, C_1, C_2, C_3) des Ikosaeders in Bezug auf das System $M'(X_1, X_2, X_3)$

	x_1	x_2	x_3
$A \dots \dots$	0	$\pm \frac{1}{2} a$	$\pm \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1)$
$B \dots \dots$	$\pm \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1)$	0	$\pm \frac{1}{2} a$
$C \dots \dots$	$\pm \frac{1}{2} a$	$\pm \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1)$	0

wobei alle Zeichencombinationen zu nehmen sind. Gehen wir nun vom Systeme $M'(X_1, X_2, X_3, X_4)$, in Bezug auf welches alle Punkte

des Ikosaeders eine $x_4 = 0$ haben, durch Verschiebung des $X_1 X_2 X_3$ -Raumes nach dem neuen Koordinatenanfang O' in der Mitte des Diameters $P' Q'$ zum Systeme $O'(X_1, X_2, X_3, X_4)$ über, so ergeben sich die Coordinaten der Eckpunkte des Ikosaeders und jene der Punkte P' und Q' in der Form

x_1	x_2	x_3	x_4
$\pm \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1)$	0	$\pm \frac{1}{2} a$	$\pm \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 3)$
$\pm \frac{1}{2} a$	$\pm \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1)$	0	$\pm \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 3)$
0	$\pm \frac{1}{2} a$	$\pm \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1)$	$\pm \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 3)$
0	0	0	$\pm \frac{1}{2} a (\sqrt{5} + 1)$

Durch Einführung des doppelten Zeichens bei der x_4 der Eckpunkte des Ikosaeders sind nun zwei einander gegenüberliegende Ikosaeder des Z_a^{600} in Betracht gezogen. Und nun liegt weiter der Gedanken nahe die Betrachtung mittels Umwechslung der Coordinaten auf andere Ikosaeder auszudehnen. Setzen wir nämlich voraus, das Z_a^{600} sei in Bezug auf die verschiedenen Achsen in derselben Weise gebaut — eine Voraussetzung, welche wir nachher auf ihre Wahrheit prüfen werden —, so gelangen wir zu 96 Eckpunkten von 8 Ikosaedern und 8 Endpunkten von 4 Diametern $P' Q'$. Dabei ist zu bemerken, dass zur Erhaltung der 96 Eckpunkte immer eine gerade Zahl von Vertauschungen der Coordinaten

$$\pm \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1), \quad 0, \quad \pm \frac{1}{2} a, \quad \pm \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 3)$$

in Anwendung kommen soll.

Ist die gemachte Voraussetzung richtig, so haben wir die 16 uns noch fehlenden Eckpunkte des Z_a^{600} zu bestimmen. Dabei werden wir von der Zahl 16 dieser noch fehlenden Eckpunkte zu der zweiten Voraussetzung geführt, dass diese Punkte die Eckpunkte eines Z^8 seien, von welchem die Coordinatenachsen vier dritte Querlinien sind. Da alle Ecken des Z_a^{600} vom Centrum O' die Entfernung $\frac{1}{2} P' Q' = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} + 1)$

haben, hat man den Coordinaten dieser 16 Eckpunkte den absoluten Wert $\frac{1}{4}a(\sqrt{5} + 1)$ beizulegen. Und nun hat wirklich jeder dieser 16 Punkte von 12 der 96 gefundenen Ikosaedereckpunkte die Entfernung a , zum Beispiel der Punkt mit den positiven Coordinaten $\frac{1}{4}a(\sqrt{5} + 1)$ von denjenigen 12 der 96 Eckpunkte, deren nicht verschwindende Coordinaten sämtlich positiv sind, u. s. w. Was mehr aussagt, es werden die beiden Voraussetzungen bewährt, indem man ein Schema der hypothetischen Coordinaten der 120 Eckpunkte des Z_a^{600} entwirft und nun nachweist, dass jeder der 120 Eckpunkte von 12 der übrigen wirklich die Entfernung a hat. Die Ergebnisse dieser Arbeit sind in Tabellen niedergelegt. Es giebt Teil A der Tabelle I in $\frac{1}{4}a$ als Einheit und mit Ersetzung von $\sqrt{5}$ durch das Symbol e die Coordinaten von 60 mit den Nummern 1, 2, .. 60 angedeuteten Eckpunkten; zu diesen gesellen sich die diametral-gegenüberliegenden, welche die Nummern $-1, -2, \dots -60$ tragen werden, mittels Umkehrung der Zeichen aller Coordinaten. Und die Tabelle II zeigt, welche Eckenpaare durch Kanten mit einander verbunden sind.

4. Es bilden die Punkte mit den Coordinaten

x_1	x_2	x_3	x_4
$3 + e$	$1 + e$	0	0
$-(1 + e)$	$3 + e$	0	0
0	0	$3 + e$	$1 + e$
0	0	$-(1 + e)$	$3 + e$

nach einander die Mitten der Kanten (53, 56), (46, -47), (33, 34), (15, -16). Deshalb wird das Z_a^{600} von der Transformation

$$\left. \begin{aligned} \lambda y_1 &= x_1 + \frac{e-1}{2} x_2, & \lambda y_2 &= -\frac{e-1}{2} x_1 + x_2 \\ \lambda y_3 &= x_3 + \frac{e-1}{2} x_4, & \lambda y_4 &= -\frac{e-1}{2} x_3 + x_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots 1)$$

senkrecht auf eine erste Querlinie gestellt. Nimmt man $\lambda = 1$, so

findet man die in Teil B der Tabelle I angegebenen Coordinaten in $\frac{1}{40} a \sqrt{10(5+e)}$ als Einheit.

In der nämlichen Weise führen die Mittelpunkte

x_1	x_2	x_3	x_4
$\frac{4}{3}(2+e)$	$\frac{2}{3}(1+e)$	0	0
$-\frac{2}{3}(1+e)$	$\frac{4}{3}(2+e)$	0	0
0	0	$\frac{4}{3}(2+e)$	$\frac{2}{3}(1+e)$
0	0	$-\frac{2}{3}(1+e)$	$\frac{4}{3}(2+e)$

der Flächen (1, 53, 56), (2, 46, -47), (3, 33, 34), (4, 15, -16) zur Transformation

$$\left. \begin{aligned} \lambda' z_1 &= \frac{3+e}{2} x_1 + x_2, & \lambda' z_2 &= -x_1 + \frac{3+e}{2} x_2 \\ \lambda' z_3 &= \frac{3+e}{2} x_3 + x_4, & \lambda' z_4 &= -x_3 + \frac{3+e}{2} x_4 \end{aligned} \right\} \dots 2),$$

welche das Z_a^{600} senkrecht stellt auf eine zweite Querlinie. Für $\lambda' = \frac{1+e}{2}$ und deshalb in $\frac{1}{12} a \sqrt{3}$ als Einheit, erhält man dann die Coordinatenwerte des Teils C von Tabelle I.

Endlich bilden die Punkte

x_1	x_2	x_3	x_4
$\frac{1}{4}(11+5e)$	$\frac{1}{4}(3+e)$	$\frac{1}{4}(3+e)$	$\frac{1}{4}(3+e)$
$\frac{1}{4}(3+e)$	$-\frac{1}{4}(11+5e)$	$\frac{1}{4}(3+e)$	$-\frac{1}{4}(3+e)$
$\frac{1}{4}(3+e)$	$-\frac{1}{4}(3+e)$	$-\frac{1}{4}(11+5e)$	$\frac{1}{4}(3+e)$
$\frac{1}{4}(3+e)$	$\frac{1}{4}(3+e)$	$-\frac{1}{4}(3+e)$	$-\frac{1}{4}(11+5e)$

8 REGELMÄSSIGE SCHNITTE UND PROJECTIONEN DES 120-ZELLES

die Mittelpunkte der Tetraeder (1, 29, 41, 53), (—2, —19, —46, 59), (—3, —24, 35, —50), (—4, —14, —26, 40). Mittels der Transformation

$$\left. \begin{aligned} \lambda'' t_1 &= (2 + e) x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 \\ \lambda'' t_2 &= x_1 - (2 + e) x_2 & + x_3 & - x_4 \\ \lambda'' t_3 &= x_1 & - x_2 - (2 + e) x_3 & + x_4 \\ \lambda'' t_4 &= x_1 & + x_2 & - x_3 - (2 + e) x_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots 3)$$

wird das Z_a^{600} also auf eine dritte Querlinie senkrecht gestellt. Für $\lambda'' = 2$, Einheit $= \frac{1}{16}(e - 1)a\sqrt{2}$, erhält man die Ergebnisse des Teils D von Tabelle I.

II. COORDINATENSTELLUNG DES Z_a^{120} .

5. Die Mittelpunkte der Flächen eines Pentagondodekaeders bilden die Eckpunkte eines Körpers, welcher der Polarfigur des Pentagondodekaeders in Bezug auf die umgeschriebene Kugel ähnlich, mit dieser concentrisch und also ein concentrisches Ikosaeder ist; dabei gelten die aus den früher erklärten symbolischen Gleichungen

$$6 Q_2^{12} = 6 D^{20}, 15 Q_1^{12} = 15 Q_1^{20}, 10 D^{12} = 10 Q_2^{20}$$

folgenden Lageverhältnisse. Ganz ebenso bilden die Mittelpunkte der 600 begrenzenden Tetraeder des Z_a^{600} ein der Polarfigur Z_a^{600} in Bezug auf die umgeschriebene Hypersphäre ähnliches und mit diesem concentrisches Zell, d. h. ein concentrisches Z^{120} ; dabei walten die von den Gleichungen

$$\begin{aligned} 300 Q_3^{600} &= 300 D^{120}, 600 Q_2^{600} = 600 Q_1^{120}, \\ 360 Q_1^{600} &= 360 Q_2^{120}, 60 L^{600} = 60 Q_3^{120} \end{aligned}$$

angegebenen Lageverhältnisse ob.

Der letzte Satz führt uns zu den vier verschiedenen Coordinatenstellungen des Z_a^{120} , welche in der Tabelle III angegeben sind. Zur Andeutung von Entstehungsweise und Zusammensetzung dieser Tabelle mögen folgende Erläuterungen genügen. Es bilden die Teile A und B eine notwendige Vorarbeit zu den eigentlichen Coordinatenstellungen C, D, E, F. Der Teil A enthält die der zweiten Tabelle entnommenen Eckpunkte von 300 Tetraedern, welche sich mittels Zeichenumkehrung zu den 600 begrenzenden Tetraedern des Z_a^{600} ergänzen. In der nämlichen Folge, worin sich diese Tetraeder aus der zweiten Tabelle ergeben, sind die entsprechenden

Eckpunkte des Z_a^{120} von den Nummern 1, 2, ... 300 und -1 , -2 , ... -300 gekennzeichnet. Weiter giebt der Teil B an, wie die 600 Eckpunkte des Z_a^{120} von Kanten mit einander verbunden sind. So findet man angewiesen, dass die Eckpunkte 1 und 2 des Z_a^{120} Endpunkte einer nämlichen Kante sind, weil den Tetraedern (1, 29, 32, 53), (1, 29, 32, 55) die Fläche (1, 29, 32) gemeinsam ist. Und nun sind die Coordinatenwerte des Teiles C durch Addition der entsprechenden Coordinaten der Eckpunkte der Tetraeder aus Teil A der ersten Tabelle gefunden, in Anschliessung an den Satz, dass diese Summen die vierfachen Werte der Coordinaten der Tetraedermittelpunkte liefern. Nachher ist dann die Länge der Kante (1, 2) berechnet und für die Coordinateneinheit den Wert $\frac{a}{2(1+e)}$ gefunden.

Natürlich können dann weiter die Teile D , E , F in ganz derselben Weise aus den Teilen B , C , D der ersten Tabelle gefunden werden. Zur Verringerung der immer noch mühseligen Arbeit haben wir es aber vorgezogen die Werte der Teile D , E , F aus den entsprechenden des Teiles C mittels der Transformationen 1), 2), 3) herzuleiten.

Mittels der erhaltenen Coordinatenstellungen ist das gestellte Problem völlig erledigt, in so fern als diese uns über die bezweckten Schnitte und Projectionen alle Auskunft geben können.

III. WINKELBEZIEHUNGEN ZWISCHEN RICHTUNGEN VON DIAGONALEN UND QUERLINIEN.

6. Im Teile A der Tabelle I hat x_4 für 15 Punkte den Wert Null, für 12, 20, 12 andere Punkte nach einander die Werte 2 , $1+e$, $3+e$ und für den auf OX_4 liegenden Punkt 4 den Wert $2(1+e)$. Weil $2(1+e)$ deshalb die Entfernung aller Eckpunkte des Z_a^{600} vom Centrum angiebt, bildet die Diagonale (4, -4) mit diesen 15, 12, 20 und 12 anderen Diagonalen nach einander Winkel von 90° , 72° , 60° und 36° .

Da auf jeder Diagonale des Z_a^{600} 15 andere senkrecht stehen, giebt es $\frac{60 \times 15}{2} = 450$ Paare von auf einander senkrecht stehenden

Diagonalen. Hat man ein solches Paar, wie (3, -3) und (4, -4), zu den Achsen OX_3 und OX_4 erwählt, so giebt es unter den anderen 58 Diagonalen nur noch ein einziges Paar (1, -1) und (2, -2), welches OX_3 und OX_4 zu einem rechtwinkligen Achsensysteme ergänzt. Deshalb bilden die 60 Diagonalen des Z_a^{600} eine

10 REGELMÄSSIGE SCHNITTE UND PROJECTIONEN DES 120-ZELLES

Zahl von $\frac{450}{6} = 75$ rechtwinkligen Achsensystemen und $75 \times 4 = 300$ rechtwinklige Trieder.

7. Wir untersuchen weiter, wie viel Querlinien des Z_a^{600} auf einer bestimmten Diagonale dieses Zelles senkrecht stehen. Am leichtesten erhält man diese Zahl mittels einer anderen, nämlich jener der Diagonalen, welche auf einer bestimmten Querlinie senkrecht stehen. Sind ξ_1 und η_1 diese Zahlen für den Fall einer ersten Querlinie, so wird die Zahl der rechten Winkel, von deren Schenkeln der eine eine Diagonale und der andere eine erste Querlinie ist, von den beiden Formen $60 \xi_1$ und $360 \eta_1$ angegeben und gilt deshalb die Beziehung $\xi_1 = 6 \eta_1$. Und nun kann der Wert von η_1 unmittelbar dem Teile *B* der Tabelle I entnommen werden. Da von sechs der 60 Eckpunkte die Coordinate y_4 verschwindet, ist $\eta_1 = 6$ und $\xi_1 = 36$.

Handelt es sich um eine zweite Querlinie, so findet man für die analogen Zahlen ξ_2 und η_2 die Werte 40 und 4. Und ist von einer dritten Querlinie die Rede, so ergibt sich $\xi_3 = 30$ und $\eta_3 = 6$, u. s. w.

IV. SENKRECHTE PROJECTIONEN VON Z_a^{600} .

7. *Projection in der Richtung einer Zelldiagonale.* Wie wir gesehen haben, erhält der Teil *A* der ersten Tabelle die Coordinaten des Z_a^{600} in Bezug auf ein von vier Diagonalen gebildetes rechtwinkliges System. Projiciren wir das in dieser Stellung gegebene Z_a^{600} in der Richtung der Achse OX_4 auf den Coordinatenraum $O(X_1, X_2, X_3)$, so sind die Coordinaten x_1, x_2, x_3 der Projectionen der 120 Eckpunkte in den ersten drei Verticalreihen dieser Tabelle enthalten. Wir zeichnen nun erst (Fig. 3) das Netz der Projectionen dieser Punkte auf die Ebene $O(X_1, X_3)$ und setzen nachher in einer bestimmten schrägen Richtung OX_2 das verkürzte x_2 aus.

Im erhaltenen Bilde sind die 120 Eckpunkte nach ihrer Entfernung vom Projectionsraume, welche einen der Werte $2(1+e)$, $3+e$, $1+e$, 2 , 0 haben kann, in Gruppen geteilt. Auf diese Weise findet man in der bezeichneten Folge den Coordinatenanfang, die 12 Eckpunkte eines Ikosaeders (rot), die 20 Eckpunkte eines Dodekaeders (blau), die 12 Eckpunkte eines grösseren Isokaeders (rot) und die 30 Eckpunkte der Combination (D, I) von Dodekaeder und Ikosaeder in Gleichgewicht (schwarz), welche mit Ausnahme der letztgenannten Combination immer Projectionen von zwei Punkten sind. Wirklich ist auch $2(1+12+20+12)+30=120$. Es ist auf die

Hineinzeichnung der Kanten, welche Eckpunkte von verschiedenen Gruppen unter einander verbinden, verzichtet. Nur ist in Fig. 4 angegeben, dass die 12 Eckpunkte des grösseren Ikosaeders und die 30 Eckpunkte der Combination (D, I) auf der Oberfläche des Projectionskörpers liegen und dieser eingeschlossen ist von den 20 hier schattirten Dreiecken des Ikosaeders und die 12×5 Seitenflächen von 12 regelmässigen fünfseitigen Pyramiden, von welchen die 12 Fünfecke der Combination (D, I) die Grundebenen und die 12 Eckpunkte des grösseren Ikosaeders die Scheitel bilden. Die Coordinaten der hinter die Oberfläche zurücktretenden Eckpunkte sind in der Tabelle durch fette Ziffern angedeutet.

Wir bemerken, dass die Combination (D, I) entweder zu einem D, oder einem I ausgebreitet wird, indem man entweder durch die Eckpunkte der Pentagonen oder durch jene der Dreiecke gerade Linien zeichnet, welche den gegenüberliegenden Seiten parallel sind.

Jeder Eckpunkt des Z_a^{600} ist mit 12 andren Eckpunkten, welche an und für sich die Eckpunkte eines Ikosaeders bilden, durch Kanten verbunden. Steht nun der Raum eines solchen Ikosaeders auf dem Projectionsraume senkrecht, so liegen die 12 Projectionen in der den beiden Räumen gemeinsamen Ebene. Dies ist (Fig. 3) zum Beispiel mit den 12 Eckpunkten (29, 32), 53, 51, (41, 44), (—42, 43), 56, —54, (—30, 31) der Fall. Es zeigt wirklich Fig. 5 die senkrechte Projection eines Ikosaeders auf die Mittelebene durch die parallelen Kanten (53, 56), (51, —54).

Weil das Z^{600} von Tetraedern begrenzt wird, wird es sich auch ereignen können, dass die Projectionen von vier Eckpunkten in einer Ebene liegen. Es zeigt das Bild des Projectionskörpers (Fig. 4), dass dies wenigstens auf der Oberfläche des Körpers nicht der Fall ist; deshalb ist es der Convexität des Zelles nach aussen zufolge überhaupt nicht der Fall.

8. *Projection in der Richtung einer ersten Querlinie.* Lassen wir vom Teile B der ersten Tabelle die vierte Verticalreihe bei Seite, so finden wir die verlangte Projection, welche Fig. 6 auf die nämliche Weise abbildet, jedoch nur was die an die Oberfläche des Projectionskörpers zu Tage tretenden Eckpunkte betrifft. Hingegen sind die unsichtbaren Eckpunkte in der Tabelle immer wieder mittels fatter Ziffern hervorgehoben.

Es zeigt das Bild, dass der Projectionskörper begrenzt wird von zwei einander gegenüberliegenden regelmässigen abgestumpften zehnsseitigen Pyramiden, welche von einem Kranze von zehn über einander greifenden gleichen sechseitigen Pyramiden mit einander verbunden sind und jede für sich von einer regelmässigen zehnsseitigen

Pyramide abgedeckt werden. Bei Drehung des Körpers um die Diagonale $(2, -2)$, welche wir die *Hauptdiagonale* des Körpers nennen, über einen Winkel von 36° , kommt er also mit sich selbst zur Deckung. In Verbindung mit dieser Thatsache sind die fünfzig Punkte, welche mit den Endpunkten der Hauptdiagonale die Eckpunkte des Körpers bilden, zehn zu zehn in fünf parallelen Ebenen gelagert.

Um die Gestalt des Körpers deutlicher hervortreten zu lassen sind die Seitenflächen der sichtbaren abgestumpften Pyramide wieder schattirt.

Weil die schattirten Seitenflächen Vierecke sind, sind sie die Projectionen von das Z^{600} begrenzenden Tetraedern, deren Räume auf dem Projectionsraume senkrecht stehen. Weiter stehen die Räume der Ikosaeder, deren Eckpunkte entweder mit einem der Eckpunkte $(2, -2)$ der Hauptdiagonale oder mit einem der zehn Eckpunkte $(\pm 1, \pm 29, \pm 30, \pm 33, \pm 34)$ des Aequatorzehneckes verbunden sind, auf dem Projectionsraume senkrecht. Denn indem die ersten zwei Ikosaeder sich als ein regelmässiges Zehneck projiciren, wie sie dies in ihrem eigenen Raume auf eine Mittelebene senkrecht auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Diagonale thun, projiciren die letzten zehn sich als Sechsecke, wie dies für das Ikosaeder vom Punkte 1 in Fig. 7 angegeben ist.

9. *Projection in der Richtung einer zweiten Querlinie.* Dem Teile C der ersten Tabelle entnehmen wir die Coordinaten der Eckpunkte der verlangten Projection, indem wir die vierte Verticalreihe bei Seite lassen. Es zeigt Fig. 8 die Lage dieser Punkte. Wie man unmittelbar erblickt, tritt hier die Diagonale $(1, -1)$ als Hauptdiagonale auf, indem der Projectionskörper begrenzt wird von einer Reihe von sechs achtseitigen Pyramiden (mit den Scheiteln $\pm 2, \pm 21, \pm 22$), mit welcher zwei vereinzelt regelmässige sechsseitige Pyramiden (mit den Scheiteln ± 1) mittels zwei von Dreiecken und Trapezen gebildeter, hier schattirter, Kragen zusammenhängen. Daher stehen hier die Räume von 12 der 600 begrenzenden Tetraeder und 8 Ikosaeder auf dem Projectionsraume senkrecht. Von diesen projiciren die sechs, deren Eckpunkte mit einem der Punkte $\pm 2, \pm 21, \pm 22$ verbunden sind, sich in ein Achteck, wie es Fig. 9 für das dem Punkte 2 entsprechende Ikosaeder zeigt. Und die beiden übrigen, deren Eckpunkte mit ± 1 verbunden sind, projiciren sich, wie auf eine Ebene ihres Raumes, welche zu zwei Seitenflächen parallel ist, als regelmässige Sechsecke. Bei dieser Projection giebt es drei verschiedene Arten von Eckpunkten, indem die an der Oberfläche des Projectionskörpers liegenden Eckpunkte entweder Eckpunkte des Projectionskörpers sind (wie 57, 58, ...) oder

nicht (wie die sechs Punkte $\pm 3, \pm 17, \pm 18$). Indem die unsichtbaren Eckpunkte immer wieder mittels fatter Ziffern angedeutet sind, werden die sechs auf Kanten liegenden Punkte durch laufende Ziffern angewiesen. Es wird diese Bezeichnungsweise weiter stets gefolgt werden.

10. *Projection in der Richtung einer dritten Querlinie.* Auf die nämliche Weise erhält man mittels drei Verticalreihen des Teiles *D* der ersten Tabelle den in Fig. 10 abgebildeten Projectionskörper. Es ist dieser Körper eine Combination (W, R) von Würfel und Rhombendodekaeder, wobei auf jeder Rhombendodekaederfläche eine sechsseitige Pyramide auftritt. Die Kanten der Combination (W, R) sind dick, die Scheiteltanten der Pyramide sind dünn gezeichnet; die Bedeutung der Schattirung wird auf Seite 19 zu Tage treten. Das Bild zeigt wieder sechs begrenzende Tetraeder, deren Räume auf dem Projectionsraume senkrecht stehen. Und offenbar thun dies auch die Räume der Ikosaeder, welche den Scheiteln der zwölf Pyramiden entsprechen. Es zeigt Fig. 11 die Projection des Ikosaeders, deren Eckpunkte mit 49 verbunden sind.

V. SENKRECHTE PROJECTIONEN Z_a^{120} .

11. *Projection in der Richtung einer dritten Querlinie.* Das Bild der Fig. 12 wird erhalten, wenn man vom Teile *C* der dritten Tabelle die vierte Verticalreihe bei Seite lässt. Es wird dieser Projectionskörper von 12 regelmässigen Fünfecken und von 30 Sechsecken begrenzt; die ersten rühren von Seitenflächen her, deren Ebene, die letzten rühren von Dodekaedern her, deren Räume auf dem Projectionsraume senkrecht stehen. Die Lage der 20 Eckpunkte des ersten Dodekaeders der dritten Tabelle zeigt Fig. 13.

12. *Projection in der Richtung einer zweiten Querlinie.* Dem Teile *D* der dritten Tabelle entnimmt man die Coordinaten der 160 Eckpunkte des in Fig. 14 dargestellten Projectionskörpers. Wie das Bild zeigt, hat dieser Körper einen von zehn Achtecken gebildeten Aequatorialkranz, welcher an beiden Seiten mittels eines Kragens von 40 Fünfecken mit einem Polzehneck zusammenhängt. Drehung des Körpers um die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser Zehnecke über einen Winkel von 36° bringt ihn mit sich selbst zur Deckung. Hiermit in Einklang sind die 160 Eckpunkte in zwölf parallelen Ebenen gelagert, welche nach einander 10, 10, 10, 20, 20, 10—, 10, 20, 20, 10, 10, 10 dieser Punkte aufnehmen. Es war diese Thatsache in Verbindung mit Fig. 6 zu erwarten. Wirklich ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Zehnecke von

14 REGELMÄSSIGE SCHNITTE UND PROJECTIONEN DES 120-ZELLES

Fig. 14 mit der Hauptdiagonale (2, —2) von Fig. 6 identisch. Und dies muss so sein, weil das von uns projecirte Z^{120} die 600 Mittelpunkte der begrenzenden Tetraeder des Z_a^{600} zu Eckpunkten hat.

Dem Bilde nach stehen die Räume von 12 der 120 begrenzenden Dodekaeder auf dem Projectionsraume senkrecht. Indem zwei von ihnen sich als regelmässige Zehneck projiciren, wie sie es in ihrem eigenen Raume auf eine ihrer Ebenen thun, projiciren die zehn übrigen sich wie Fig. 15 zeigt als Achtecke.

Die 30 an der Oberfläche liegenden Punkte, welche keine Eckpunkte des Projectionskörpers sind, liegen auf die von Fig. 15 angegebene Weise in folgender Anordnung auf den zehn vom Aequator senkrecht halbirtten Kanten (4, **1**, **3**, **2**, 5), (10, **7**, **8**, **6**, 9), (—194, —**191**, —**288**, —**111**, —114), (—247, —**48**, —**243**, —**43**, —245), (—134, —**131**, —**284**, —**91**, —94) und die nämlichen, worin alle Zeichen umgekehrt sind.

In den Theilen *D*, *E*, *F* der dritten Tabelle sind die im Innern der Acht-, Zehn- und Zwölfecken, also nicht auf Kanten liegenden Eckpunkte in der nämlichen Weise, wie die unsichtbaren Punkte angedeutet; in den Zeichnungen sind diese Punkte nicht angegeben.

13. *Projection in der Richtung einer ersten Querlinie.* Bei diesem aus dem Teile *E* der dritten Tabelle zu schöpfenden Körper (Fig. 16) findet man einen Aequatorialgürtel von sechs nicht zusammenhängenden Zehneck und zwei Polzwölfecken, welche acht Vielecke mittels Fünfecke unter einander verbunden sind. Es tritt die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Zwölfecke als Achse auf; eine Drehung von 60° um diese Achse bringt den Körper mit sich selbst zur Deckung. Offenbar muss diese Achse mit der Hauptdiagonale (1, — 1) von Fig. 8 zusammenfallen.

Die Figuren 17 und 18 zeigen, wie ein Dodekaeder sich projecirt als ein symmetrisches Zehneck und ein halbreghelmässiges Zwölfeck.

14. *Projection in der Richtung einer Zelldiagonale.* Zum letzten führt Teil *F* von der dritten Tabelle zum Körper der Fig. 19, welcher von zwölf Zehneck und von 72 Fünfecken begrenzt wird.

VI. ALLGEMEINES ÜBER CENTRALSCHNITTE DER BEIDEN ZELLEN.

15. In unsren beiden vorhergehenden Aufsätzen haben wir uns öfters der Reciprocität in Bezug auf eine Hypersphere bedient, um aus den senkrechten Projectionen des einen Zelles die Centralschnitte

des ihm dualistisch gegenüber stehenden Zelles abzuleiten. Dieser Beziehung nach erhalten wir in Verbindung mit den gefundenen Ergebnissen die in folgende Tabelle niedergelegten Resultate :

		D	Q_1	Q_2	Q_3		
Projectionen von	Z^{600}	$E. \dots$	42	52	56	44	$\dots F$
		$K. \dots$	120	130	150	120	$\dots K$
		$F. \dots$	10	80	96	78	$\dots E$
	Z^{120}	$E. \dots$	158	180	160	80	$\dots F$
		$K. \dots$	240	282	250	120	$\dots K$
		$F. \dots$	84	104	92	42	$\dots E$
		Q_3	Q_2	Q_1	D		

Diese kleine Tabelle ¹⁾, welche von oben und nach rechts gelesen die Projectionen, von unten und nach links gelesen die Schnitte kennzeichnet, wobei die Anordnung von D, Q_1, Q_2, Q_3 in Q_3, Q_2, Q_1, D umkehrt, zeigt was wir bei der Bestimmung der Central-schnitte zu erwarten haben; so muss der Schnitt des Z^{600} mit dem Mittelraume senkrecht zu einer Q_2 ein Körper sein, der 104 Eckpunkte, 282 Kanten und 180 Seitenflächen hat, u. s. w.

16. Wir weisen hier auf die merkwürdige Thatsache hin, dass die drei Zahlen des oberen Teiles der ersten Verticalreihe den von

¹⁾ Indem bei Z^5 keine Geraden D, Q_1, Q_2, Q_3 auftreten und die Resultaten bei Z^8 und Z^{16} nur sehr unvollkommen von einer Tabelle der Eckpunkte, Kanten und Seitenflächen gekennzeichnet wird, kann es nützlich sein die bei Z^{24} gefundenen Ergebnisse in eine Tabelle niederzulegen. Sie ist die folgende :

		D	Q_1	Q_2	Q_3		
Projectionen von Z^{24} .	$E. \dots$	14	14	18	12	$\dots F$	Schnitte von Z^{24} .
	$K \dots$	24	30	42	24	$\dots K$	
	$F. \dots$	12	18	26	14	$\dots E$	
		Q_3	Q_2	Q_1	D		

Bei Z^5 treten die Räume, welche eine Kante senkrecht halbiren, als Symmetrieräume auf, u. s. w.

unten gelesenen drei Zahlen des unteren Teiles der letzten Verticalreihe gleich sind. Diese Coincidenz ist nicht zufällig, vielmehr der Ausdruck eines allgemeinen Gesetzes, das wir in den beiden vorhergehenden Aufsätzen wohl bewährt sahen, dort jedoch noch nicht ausdrücklich hervorgehoben haben. Es ist dies, dass Projection auf einen Mittelraum und Schnitt mit diesem völlig zusammenfallen, wenn dieser Mittelraum ein Symmetrieraum des Zelles ist. Wie unmittelbar einleuchtet, ist diese Coincidenz eine Folge von zwei äquivalenten Conventionen, welche einander dualistisch gegenüber stehen: erstens dass man bei der Projection die sich im Innern des Projectionskörpers projicirenden Eckpunkte unberücksichtigt lässt, zweitens dass man beim Schnitte nur diejenigen Schnittpunkte der Kanten in Betracht zieht, welche zwischen den beiden Kantenendpunkten liegen. Denn diese Annahmen sind Ursache, dass man sich im Falle eines Symmetrieraumes R zu in R liegenden Punkten und Kanten und zu auf R senkrecht stehenden Kanten, Seitenflächen und Grenzkörpern beschränken kann.

17. In gedrängter Kürze deuten wir hier die mit dem angegebenen Gesetze in Einklang stehenden Ergebnisse der beiden vorhergehenden Arbeiten an.

Beim Z_a^8 gibt es zwei Arten von Symmetrierräumen, Mittelräume R_3 senkrecht auf einer Q_3 , Mittelräume R_2 senkrecht auf einer Q_2 . Für die ersteren werden Projection und Schnitt vom nämlichen Würfel W_a , für die letzteren werden sie vom nämlichen Parallelpipiped $P_{a,a,a\sqrt{2}}$ gebildet. Deshalb finden wir bei der reciproken Polarfigur, beim Z_a^{16} , Symmetrierräume R_d senkrecht auf einer D und R_1 senkrecht auf einer Q_1 . Für die R_d bildet die nämliche vierseitige Doppelpyramide, für die R_1 bildet das nämliche Octaeder O_2 Projection und Schnitt.

Weil die Polarfigur des Z^{24} in Bezug auf eine concentrische Hypersphere ein neues Z^{24} in anderer Stellung ist, hat es zwei Arten von Symmetrierräumen, R_d senkrecht auf D und R_3 senkrecht auf Q_3 aufzuweisen. Für R_d bildet ein nämliches Rhombendodekaeder, für R_3 bildet eine nämliche Combination (W, O) Projection und Schnitt.

18, Wie die zwei die Coordinaten von den Eckpunkten des Z^{600} und Z^{120} enthaltenden Tabellen unmittelbar zeigen, ist jeder Mittelraum R_d senkrecht auf D Symmetrieraum von Z^{600} und deshalb auch jeder Mittelraum R_3 senkrecht auf Q_3 (von Z^{120}) Symmetrieraum von Z^{120} . Daher die Coincidenz von Projection und Schnitt bei Z^{600} für R_d und bei Z^{120} für R_3 . Wirklich sind (Fig. 4) die Eckpunkte der gleichseitigen Dreiecke und (Fig. 12) die Eckpunkte

der regelmässigen Fünfecke im Schnittraume enthalten und bilden die übrigen Eckpunkte, welche alle zwei Nummern tragen, zu gleicher Zeit die Projection dieser Punktepaare und den in der Mitte liegenden Schnittpunkt der in diesen Punkten endenden senkrechten Kante. Es ist diese Uebereinstimmung die Ursache, warum beide Figuren auf derselben Tafel abgebildet sind.

Es liegt uns also jetzt noch ob von Z^{600} die Schnitte mit Mittelräumen senkrecht auf Q_1, Q_2, Q_3 , von Z^{120} die Schnitte mit Mittelräumen senkrecht auf Q_2, Q_1, D in Bild zu bringen. Dies wird am einfachsten geschehen, indem man für jeden Fall 1°. die im Schnittraume liegenden Eckpunkte und 2°. die an verschiedenen Seiten des Schnittraumes liegenden Kantenendpunkte mit dem vom Schnittpunkte bestimmten Teilungsverhältnis aufsucht.

VII. DIE CENTRALSCHNITTE VON Z^{600} .

19. *Centralschnitt mit einem R_1 .* Dem Teile B der ersten Tabelle nach sind die 92 Eckpunkte des Schnittkörpers leicht in der Projection Fig. 6 nachzuweisen. Sie sind:

1°. die 12 im Schnittraume ($y_4 = 0$) liegenden Punkte $\pm 1, \pm 2$, u.s.w., welche die Endpunkte der Hauptdiagonale und die Eckpunkte des Aequatorzehneckes bilden;

2°. die Mitten a, a' der 40 parallelen Seiten (17, 57), (21, 5), u.s.w. der 20 Trapezia;

3°. die Punkte b , welche die 20 anderen Seiten dieser Trapezia in ein bestimmtes Verhältnis schneiden;

4°. die Punktepaare, welche die 10 Schnittlinien zwischen 21 und 13, 22 und 14, u.s.w. der Grundebenen der über einander greifenden Pyramiden nach einem bestimmten Verhältnisse und nach dem reciproken Verhältnisse schneiden.

Deshalb wird der Schnitt erhalten, indem man in der Projection Fig. 6 die neuen Punkte hineinzeichnet und die Verbindungsgeraden anbringt; dies ist in Fig. 6^{bis} ausgeführt. Es wird, wie man sieht, der Schnittkörper von 20 symmetrischen Vierseiten und 100 Dreiseiten begrenzt. Es tritt die Reciprocität zwischen den Körpern Fig. 14 und Fig. 6^{bis} nach dem bekannten Gesetze ganz unverletzt auf. Dem letzten Ergebnis, dass der Schnittkörper von 20 Vierecken und 100 Dreiecken begrenzt wird, entspricht die Thatsache, dass der Projectionskörper 20 vierflächige und 100 dreiflächige Eckpunkte aufzuweisen hat, u.s.w.

20. *Centralschnitt mit einem R_2 .* Auf die nämliche Weise ist mit Hilfe von Teil C der ersten Tabelle Fig. 8^{bis} entstanden. Es sind hier die 104 Eckpunkte des Schnittkörpers:

1^o. die acht im Schnittraume liegenden Punkte ± 1 , ± 2 , u.s.w., welche die Eckpunkte der Hauptdiagonale und die Scheitel der sechs Aequatorialpyramiden bilden ;

2^o. die Mitten a , a' der 24 parallelen Seiten der 12 Trapezia ;

3^o. die 24 Punkte b , welche die anderen Seiten der Trapezia nach bestimmtem Verhältnisse teilen ;

4^o. die 6 Punktpaare c c , welche dies die Mittellinien (29, —30), u.s.w. der beiden Zwölfecken thun ;

5^o. die 12 Punktpaare d d , welche dies die Untenseiten (5, 57), (57, 45), u.s.w. der Kragenfalten thun ;

6^o. die Punktpaare e e , welche die sechs Kanten (57, 58), u.s.w. nach Verhältnissen λ und $\frac{1}{\lambda}$ teilen.

Wir lenken die Aufmerksamkeit auf die völlige Reciprocität der Figuren 16 und 8^{bis}.

21. *Centralschnitt mit einem R_3 .* Mit Hilfe des Theiles D bildet man den Projectionskörper Fig. 10 in den dem Bilde der Fig. 19 reciprok gegenüber stehenden Schnittkörper Fig. 10^{bis} um. Es sind hier die 84 Eckpunkte :

1^o. die 12 im Schnittraume liegenden Scheitel ± 55 , u.s.w. der sechsseitigen Pyramiden ;

2^o. die Mitten a , b , c , d der 24 Seiten der sechs Quadrate ;

3^o. die Punktpaare ee' , ff' , gg' , welche die von den Seiten des Quadrates verschiedenen Seiten der Grundebenen der 12 Pyramiden

nach bestimmten Verhältnissen λ und $\frac{1}{\lambda}$ teilen.

VIII. DIE CENTRALSCHNITTE VON Z^{120} .

22. *Centralschnitt mit einem R_2 .* Die 80 Eckpunkte des Schnittes sind nach dem Teile D der dritten Tabelle :

1^o. die 20 vierflächigen Eckpunkte 86, u.s.w. des Projectionskörpers Fig. 14, welche im Schnittraume liegen ;

2^o. die Mitten a der 20 Seiten (24, 25) u.s.w. der beiden Polzehnecke ;

3^o. die Mitten b der 20 Seiten (103, 109) u.s.w. der zehn Aequatorachtecke ;

4^o. die Punktpaare c c , welche die Schnittlinien (114, 194) der Ebenen dieser Aequatorachtecke nach bestimmten Verhältnissen λ

und $\frac{1}{\lambda}$ teilen.

So ist das Bild Fig. 14^{bis} des Schnittkörpers entstanden; es ist dem Bilde der Fig. 6 reciprok verwandt.

23. *Centralschnitte mit einem R_1 .* Mittels des Teiles E der dritten Tabelle wird aus dem Projectionskörper von Fig. 16 der Schnittkörper Fig. 16^{bis} abgeleitet, welcher dem Körper der Fig. 8 reciprok gegenüber steht. Es sind die 96 Eckpunkte:

1^o. die 24 im Schnittraume liegenden Punkte, welche aus den 12 Aequatorpunkten 25, 258, u.s.w. und den 12 vierflächigen Eckpunkten 99, u.s.w. bestehen;

2^o. die Mitten a der 12 Linien (37, 38) u.s.w.;

3^o. die Mitten b der 12 Linien (17, 20) u.s.w.;

4^o. die Punkte c , welche die 24 Linien (99, 100), u.s.w. nach bestimmtem Verhältnisse teilen;

5^o. die Punkte d , welche dies die 24 Linien (23, 37), u.s.w. thun.

24. *Centralschnitt mit einem R_d .* Teil F der dritten Tabelle thut aus dem Projectionskörper von Fig. 19 den Schnittkörper von Fig. 19^{bis} hervorgehen. Es sind die 78 Eckpunkte dieses letzteren mit Fig. 10 reciprok verwandten Körpers:

1^o. die 54 im Schnittraume liegenden Punkte, von welchen sechs (± 4 , ± 32 , ± 55) auf den Coordinatenachsen liegen und die 48 übrigen Endpunkte sind von Kanten, welche zwei Zehnecke mit einander verbinden;

2^o. die Mitten a der 24 Kanten, (2, 5), u.s.w.

IX. PROJECTIONS- UND SCHNITTKÖRPER, WELCHE COMBINATIONEN VON KRYSTALLFORMEN SIND.

25. Indem wir uns auf das reguläre System beschränken, wollen wir zum Schluss noch kurz hervorheben, dass die Körper 10, 10^{bis}, 19, 19^{bis} Combinationen von Krystallformen sind. Deuten wir die sieben bekannten Formen Hexaeder, Octaeder, Rhombendodekaeder, Tetrakishexaeder, Triakisoctaeder, Ikositetraeder und Hexakisoctaeder durch die Symbole H , O , R , Th , To , I , Ho an, so ist dies im folgenden durchsichtigen Schema angegeben:

Fig. 10 . . . (1, 41, 53, 29) = H , (1, 31, 41) = Th , (1, 31, -54) = Ho .

Fig. 10^{bis} . . (a, b, c, d) = H , (e, f, g) = O , (a, b, h) = I , (f, g, 31) = To ,
(b, h, 55) = Ho , (g, h, 31) = Ho' .

Fig. 19 . . . (1, 2, 5, 3, 4) = Th , (3, 5, 9, 13, 11) = I ,

(9, 13, -235, -288, 293) = I' ,

(2, 5, 9, 293, -298, -300, -219, -220, 216, 283) = R .

Fig. 19^{bis} . . (4, 9, 13) = I , (9, -298, -220, 283) = R , (9, 13, -236...) = O .

20 REGELMÄSSIGE SCHNITTE UND PROJECTIONEN DES 120-ZELLES U.S.W.

Es würde ein Leichtes sein die Parameterverhältnisse der beiden *Ho* von Fig. 10^{bis} und *I* von Fig. 19 zu berechnen. Um nicht zu weiltläufig zu werden wollen wir darauf aber verzichten.

Obgleich die Körper 10 und 19^{bis}, 19 und 10^{bis} einander reciprok sind in Bezug auf eine bestimmte Hypersphere, kommt diese Beziehung hier nicht zum Ausdruck, weil bei den Krystalformen einseitig nur auf die Flächen, nicht auch auf die Eckpunkte geachtet wird.

Groningen, April 1894.

ERKLÄRUNG DER TAFELN.

—❧—

$\alpha.$ SECHSHUNDERTZELL = Z^{600} .

Fig. Tab.

1. I. Bestimmung des Radius der dem Ikosaeder umgeschriebenen Kugel.
2. » Einfachste Coordinatenstellung des Ikosaeders; die Coordinatenachsen sind erste Querlinien. Diese Stellung ist auf zwei verschiedene Weisen möglich (gekreuzte Stellung).
3. II. Senkrechte Projection des Z^{600} in der Richtung einer Zelldiagonale. Es zeigt das Bild die schichtweise Lagerung der 120 Eckpunkte. Von innen nach aussen fortschreitend findet man den Coordinatenanfang O, die 12 Eckpunkte eines Ikosaeders (rot und dünn), die 20 Eckpunkte eines Dodekaeders (blau), die 12 Eckpunkte eines grösseren Ikosaeders (rot und dick), welche Punkte Projectionen von zwei Eckpunkten sind und die einfach zählenden 30 Eckpunkte der Combination (D, I) von Dodekaeder und Ikosaeder in Gleichgewicht (schwarz).
4. I. Am Tage tretende Eckpunkte, Kanten und Flächen des vorhergehenden Projectionskörpers, welcher zu gleicher Zeit den Schnitt des Z^{600} mit dem Projectionsraume bildet. Es sind die Eckpunkte die 12 Eckpunkte des grösseren Ikosaeders und die 30 Eckpunkte der Combination (D, I). Die 80 einschliessenden Dreiecke teilen sich in 20 hier schattirte, deren Ebenen bei Ausbreitung das Ikosaeder der Combination (D, I) liefern, und in die 60 Seitenflächen von 12 regelmässigen fünfseitigen Pyramiden, deren Grundebenen bei Ausbreitung das Dodekaeder der Combination (D, I) bilden und deren Scheitel die oben genannten Eckpunkte des grösseren Ikosaeders sind.

Fig. Tab.

5. I. Senkrechte Projection eines Ikosaeders auf die Mittelebene durch zwei parallele Kanten, d. h. in der Richtung einer ersten Querlinie, als Sechseck.

6. III. Senkrechte Projection des Z^{600} in der Richtung einer ersten Querlinie. Es tritt für diesen Projectionskörper die Diagonale $(2, -2)$ als Hauptdiagonale auf, indem die 50 übrigen Eckpunkte sich zu 10 in fünf auf dieser Diagonale senkrecht stehenden Ebenen lagern und eine Drehung von 36° um diese Diagonale den Körper in sich transformirt (krystallographische Achse mit der Periode 10). Die Begrenzung besteht aus zwei einander gegenüberliegenden, hier schattirten, regelmässigen abgestumpften zehnsseitigen Pyramiden (gemässigte Zonen), welche von einem Kranze von zehn über einander greifenden gleichen sechsseitigen Pyramiden (Aequator) mit einander verbunden sind und jede für sich von einer regelmässigen zehnsseitigen Pyramide (Polgegend) abgedeckt werden.

- 6bis. » Schnitt des Z^{600} mit dem Mittelraume senkrecht auf einer ersten Querlinie. In eine schwach angegebene Wiederholung der vorhergehenden Projection ist der Schnitt mit schweren Linien hineingetragen. Auch für diesen Schnittkörper tritt die Diagonale $(2, -2)$ als Achse mit der Periode 10 auf, in dem die 90 übrigen Eckpunkte in neun Ebenen senkrecht auf dieser Geraden die Eckpunkte sind von neun regelmässigen Zehneckern. Es wird der Körper von 20 Deltoiden und 100 Dreiecken begrenzt. Um die Regelmässigkeit in Bezug auf die Achse deutlich hervortreten zu lassen, sind zwei Kränze von Dreiecken schattirt.

7. I. Senkrechte Projection eines Ikosaeders auf die Mittelebene durch eine Körperdiagonale und eine auf dieser Geraden senkrecht stehende erste Querlinie, als Sechseck.

8. IV. Senkrechte Projection des Z^{600} in der Richtung einer zweiten Querlinie. Hier tritt die Diagonale $(1, -1)$ als Achse mit der Periode 6 auf, und lagern die übrigen 54 Eckpunkte sich zu 6, 12, 6, 6, 6, 12, 6 in sieben senkrecht auf dieser Geraden stehende Ebenen. Es projiciren die Punkte ± 3 , ± 17 , ± 18 sich als Mitten von Kanten. Die Begrenzung besteht aus einer Reihe von sechs achtseitigen Pyramiden (Aequator), von welcher zwei vereinzelte regelmässige sechsseitige Pyramiden (Pole) mittels zwei von Dreiecken und Trapezen gebildeter, hier schattirter, Kragen (gemässigte Zonen) getrennt sind.

Fig. Tab.

- 8^{bis}. IV. Schnitt des Z^{600} mit dem Mittelraume senkrecht auf einer zweiten Querlinie. In eine schwach angegebene Wiederholung der vorhergehenden Projection ist der Schnitt mit schweren Linien hineingezeichnet. Es bleibt die Diagonale (1, —1) Achse mit der Periode 6; in elf Ebenen senkrecht auf ihr liegen nach einander 12, 12, 6, 12, 6, 6, 6, 12, 6, 12, 12 übrige Punkte. Der Körper wird begrenzt von 12 gleichschenkligen Trapezen (schattirt), 12 Deltoiden (schattirt) und 156 Dreiecken (24 schattirt und 132 nicht schattirt). Diese Flächen bilden eine Aequatorialreihe von sechs zehneitigen Pyramiden, zwei zwölfseitige Polarpyramiden und zwei von Trapezen, Deltoiden und Dreiecken gebildete gemässigte Zonen; dabei ist die Schattirung so getroffen, dass die verschiedenen Teile der Zonen deutlich hervortreten.
9. I. Senkrechte Projection des Ikosaeders auf die Mittelebene durch eine erste Querlinie und eine zu dieser senkrechte zweite Querlinie, als Achteck.
10. » Senkrechte Projection des Z^{600} in der Richtung einer dritten Querlinie. Grundform dieses Körpers ist eine Combination (W, R) von Würfel und Rhombendodekaeder; die Kanten dieser Combination sind mittels dicker Linien angegeben. Auf jeder Rhombendodekaederfläche sitzt eine sechsseitige Pyramide auf. Die Würfel Flächen sind leicht schattirt. Die Seitenflächen der sechsseitigen Pyramiden sind teils nicht, teils schwer schattirt; bei Ausbreitung bilden die ersten ein Pyramidenwürfel (Tetra-kishexaeder) und die letzteren ein Hexakisoctaeder.
- 10^{bis}. » Schnitt des Z^{600} mit dem Mittelraume senkrecht auf einer dritten Querlinie. In eine schwach angegebene Wiederholung der vorhergehenden Projection ist der Schnitt mit starken Linien hervorgehoben. Es wird dieser Körper begrenzt von 158 Dreiecken, von welchen bei Ausbreitung 6 und 48 nicht schattirte ein Hexaeder und ein Hexakisoctaeder, 24 und 48 leicht schattirte ein Triakisoctaeder und ein Hexakisoctaeder, 24 und 8 schwer schattirte ein Ikositetraeder und ein Octaeder bilden,
11. » Senkrechte Projection eines Ikosaeders in der Richtung der Schnittlinie von zwei Seitenflächen, welchen wohl ein Eckpunkt aber keine Kante gemeinsam ist, als Sechseck.

β . HUNDERTZWANZIGZELL = Z^{120} .

Fig. Tab.

12. II. Senkrechte Projection des Z^{120} in der Richtung einer dritten Querlinie. Der Körper wird von 42 Flächen eingeschlossen. Die 12 schattirten, welche regelmässige Fünfecke enthalten, bilden bei Ausbreitung ein Dodekaeder; die 30 nicht schattirten liefern auf dieselbe Weise eine den Eckpunkten nach genomme Combination (D, I) von Dodekaeder und Ikosaeder in Gleichgewicht*). Es sind also die von den Pentagoneckpunkten des Körpers verschiedenen Eckpunkte die Eckpunkte eines Dodekaeders. Der Körper ist dem in Fig. 4 angegebenen Schnitte reciprok verwandt.
13. I. Senkrechte Projection des Dodekaeders in der Richtung einer Kante, als Sechseck.
14. V. Senkrechte Projection des Z^{120} in der Richtung einer zweiten Querlinie. Dieser Körper wird von 2 regelmässigen Zehneck, 10 Achtecken und 80 Fünfecken begrenzt; er hat die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Zehnecke zur Achse mit der Periode 10. Es liegen also die 120 Eckpunkte zu 10 in 12 Ebenen senkrecht auf dieser Achse. Der Aequatorialkranz von 10 Achtecken und die Polarzehnecke sind schattirt; ausserdem ist der mittlere Teil der verbindenden Zonen schattirt um ihre Regelmässigkeit hervortreten zu lassen. Reciprocität zu Fig. 6^{bis}.
- 14^{bis}. » Schnitt des Z^{120} mit dem Mittelraume senkrecht auf einer zweiten Querlinie. In eine schwach angegebene Wiederholung des vorhergehenden Körpers ist der Schnitt hineingetragen. Die Achse mit der Periode 10 bleibt erhalten; es lagern sich die 80 Eckpunkte in 8 zu ihr senkrechte Ebenen. Der Körper zeigt einen Aequatorialkranz von 10 Sechsecken (schattirt),

*) Es entsteht eine Combination den Eckpunkten nach von Würfel und Octaeder, wenn man auf die Seitenflächen gleiche regelmässige Pyramiden aufsetzt; so entstehen Pyramidenwürfel und Pyramidenoctaeder, je nachdem man entweder vom Würfel oder vom Octaeder ausgeht. Die Combination in Gleichgewicht ist der Rhombendodekaeder.

Bei der Combination (D, I) den Eckpunkten nach erhält man ein auf jeder Seitenfläche eine dreiseitige Pyramide tragendes Ikosaeder und ein auf jeder Seitenfläche eine fünfseitige Pyramide tragendes Dodekaeder; in beiden Fällen ist die Zahl der Flächen 60. Bei der Combination in Gleichgewicht wird die Zahl der Flächen also 30.

Fig. Tab.

zwei Polarzehnecke und zwei von 10 gleichschenkligen Trapezen (schattirt) und 10 Fünfecken gebildete Zonen. Reciprocität zu Fig. 6.

15. I. Senkrechte Projection des Dodekaeders auf eine Mittelebene durch eine erste und eine zu dieser senkrechte zweite Querlinie, als Achteck.
16. VI. Senkrechte Projection des Z^{120} in der Richtung einer ersten Querlinie. Dieser Körper wird von 2 regelmässigen Zwölfecken, (leicht schattirt), 6 Zehneck (nicht schattirt) und 96 Fünfecken (teilweise schwer, leicht und nicht schattirt) begrenzt. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Zwölfecke ist Achse mit der Periode 6; es lagern die 180 Eckpunkte sich entweder zu 12 oder zu 6 in 19 Ebenen senkrecht auf ihr. Die Schattirung ist so gewählt, dass der regelmässige Bau des Körpers deutlich hervortritt. Reciprocität zu Fig. 8^{bis}.
- 16^{bis}. VI. Schnitt des Z^{120} mit dem Mittelraume senkrecht auf einer ersten Querlinie. In eine schwach angegebene Wiederholung des vorhergehenden Körpers ist der Schnitt hineingezeichnet. Es bleibt die Achse mit der Periode 6 behalten; es lagern sich die 96 Eckpunkte entweder zu 12 oder zu 6 in 11 Ebenen senkrecht auf ihr. Der Körper zeigt einen Aequatorialgürtel von 6 Achtecken (nicht schattirt), 12 Sechsecken (schattirt) und 24 Vierecken (schattirt), zwei Zonen von 6 Sechsecken (nicht schattirt) und zwei Polarsechsecken (nicht schattirt). Reciprocität zu Fig. 8.
17. I. Senkrechte Projection des Dodekaeders auf eine Mittelebene durch eine Körperdiagonale und eine zu ihr senkrechte erste Querlinie, als Zehneck.
18. I. Senkrechte Projection des Dodekaeders in der Richtung einer Körperdiagonale, als Zwölfeck.
19. VII. Senkrechte Projection des Z^{120} in der Richtung einer Zell-diagonale. Dieser Körper wird von 12 Zehneck und 72 Fünfecken begrenzt. Die Ausbreitung der Ebenen von den 12 facettenartigen, nicht schattirten Zehneck liefert ein Rhombendodekaeder, jene der 24 leicht schattirten Fünfecke ein Ikositetraeder, jene der 48 schwer schattirten Fünfecke ein zweites Ikositetraeder und ein Pyramidenwürfel. Reciprocität zu Fig. 10^{bis}.

Fig. Tab.

19^{bis}. VII. Schnitt des Z^{120} mit dem Mittelraume senkrecht auf eine Zelldiagonale. In eine schwach angegebene Wiederholung des vorhergehenden Körpers ist der Schnitt hervorgehoben. Der neue Körper wird von 20 Sechsecken und 24 Fünfecken begrenzt. Bei Ausbreitung liefern die 12 nicht schattirten Sechsecke ein Rhombendodekaeder, die 8 leicht schattirten Sechsecke ein Octaeder und die 24 schwer schattirten Fünfecke ein Ikositetraeder. Reciprocität zu Fig. 10.

ERRATA.

In Tabelle III (drittes Blatt) ist unter F in der Horizontallinie von 219 für $3+\theta$ und $-(3+\theta)$ zu lesen $3+e$ und $-(3+e)$.

Fig. 1.

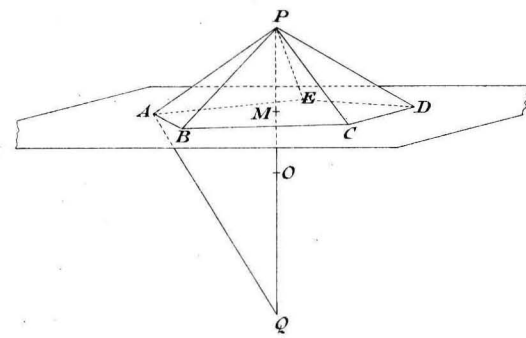


Fig. 2.

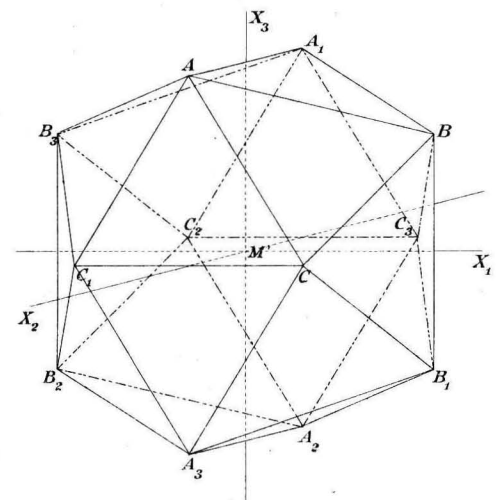


Fig. 5.

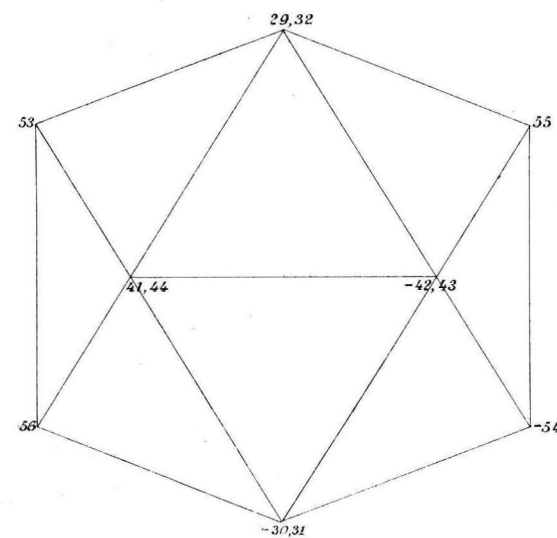


Fig. 4.

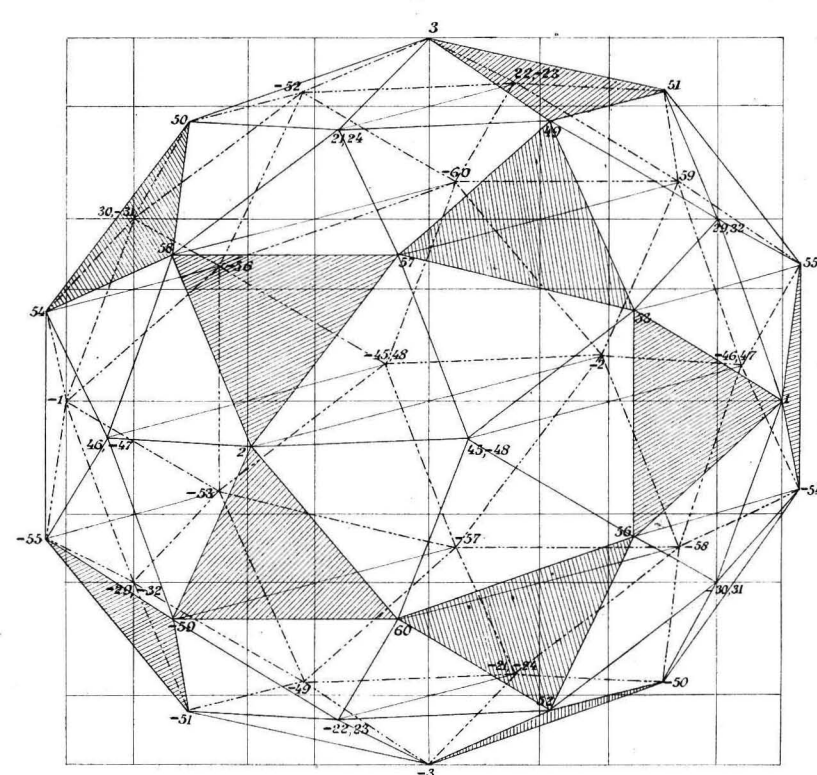


Fig. 10.

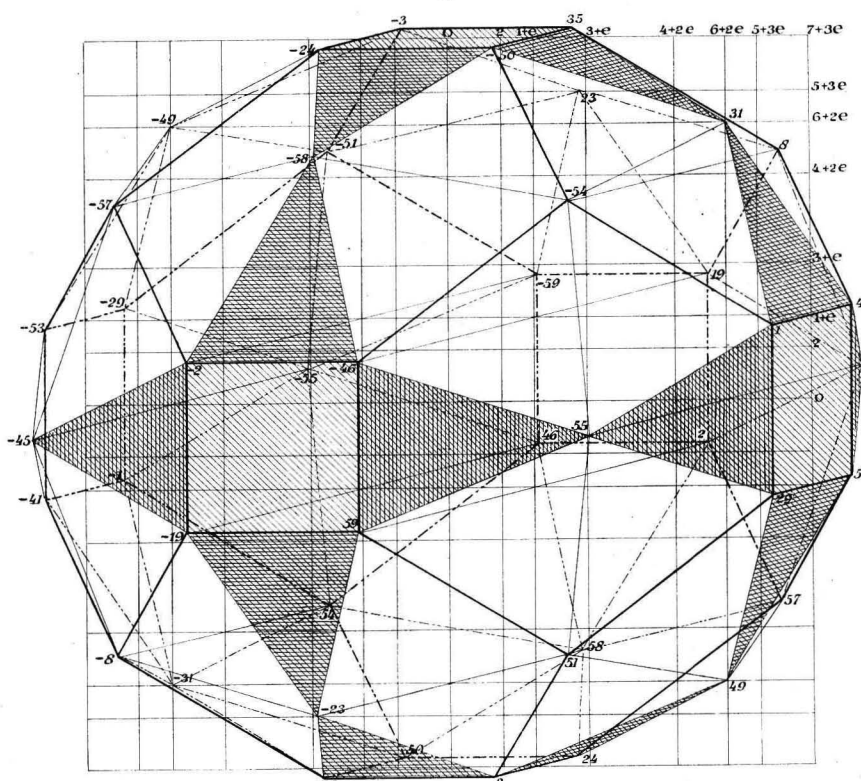


Fig. 10^{bis}.

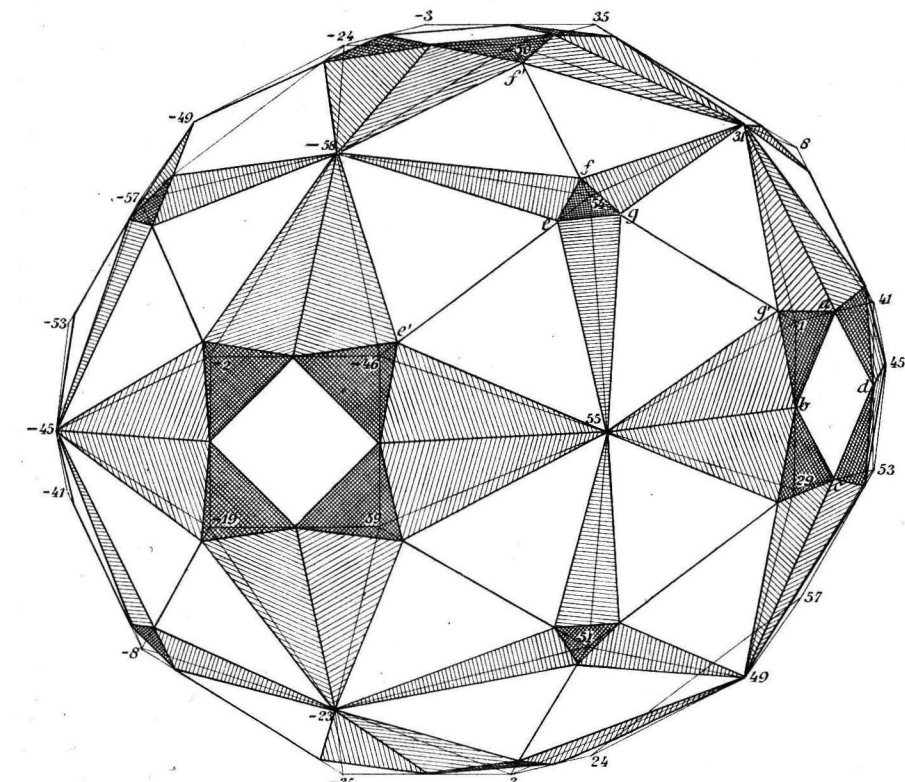


Fig. 13.

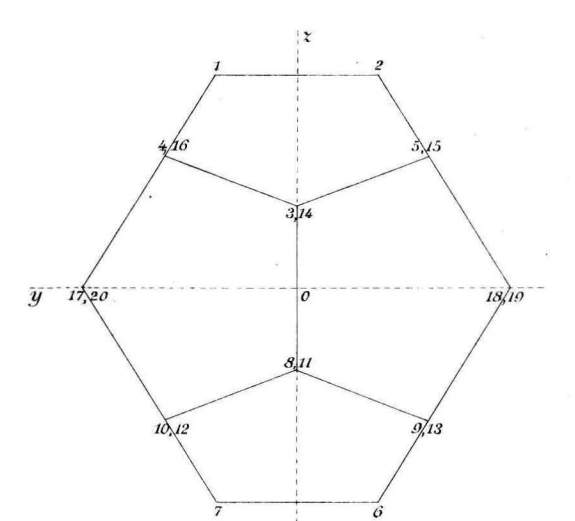


Fig. 15.

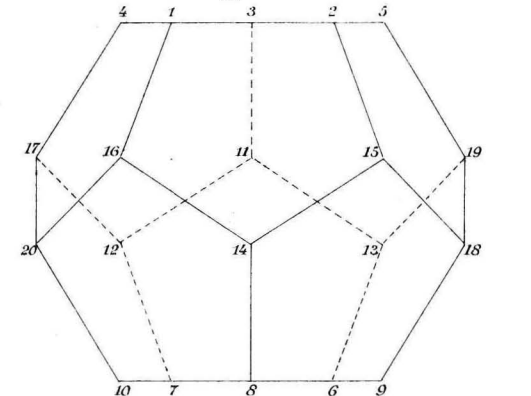


Fig. 17.

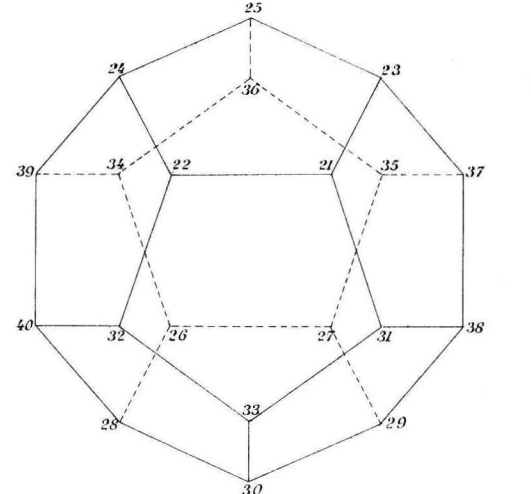


Fig. 18.

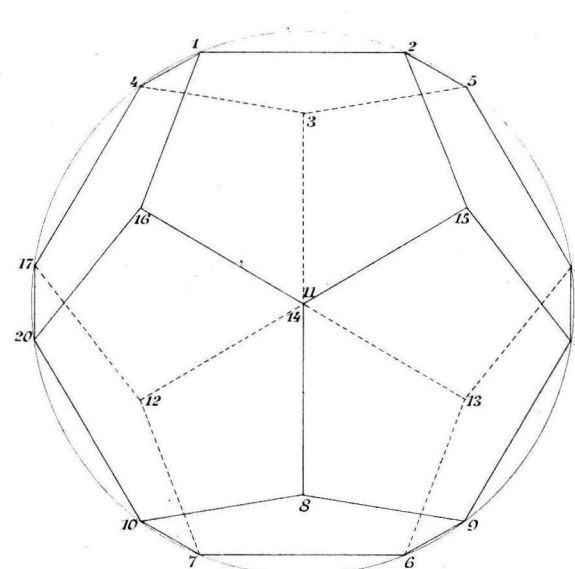


Fig. 11.

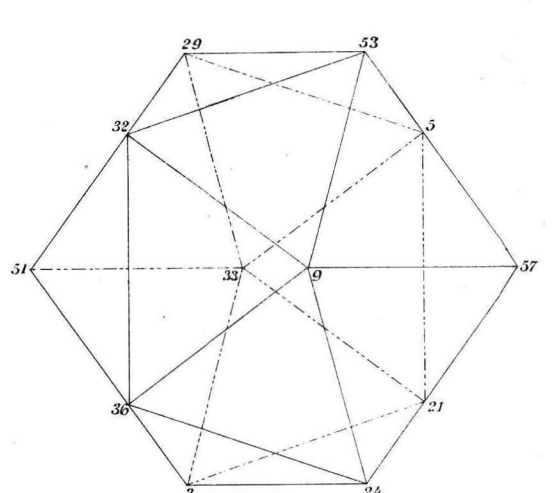


Fig. 9.

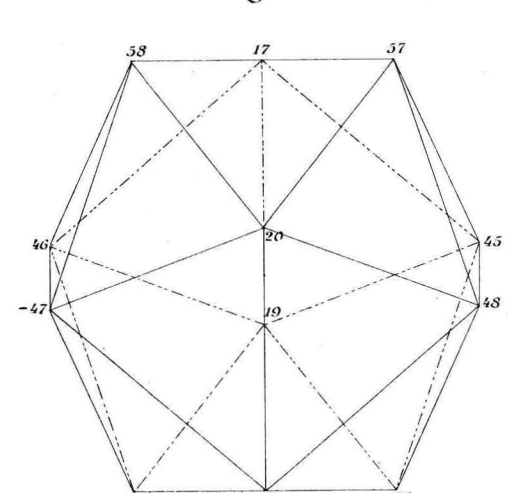
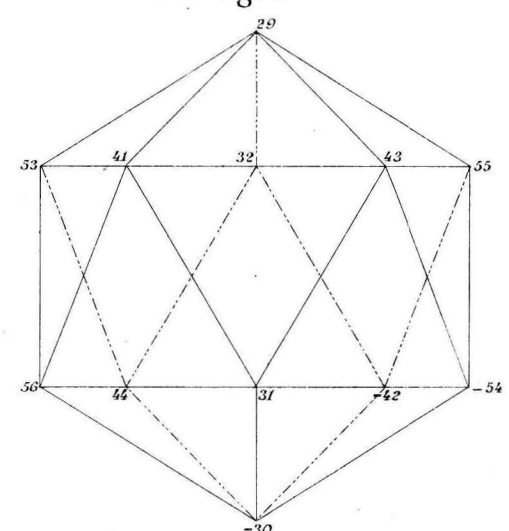


Fig. 7.



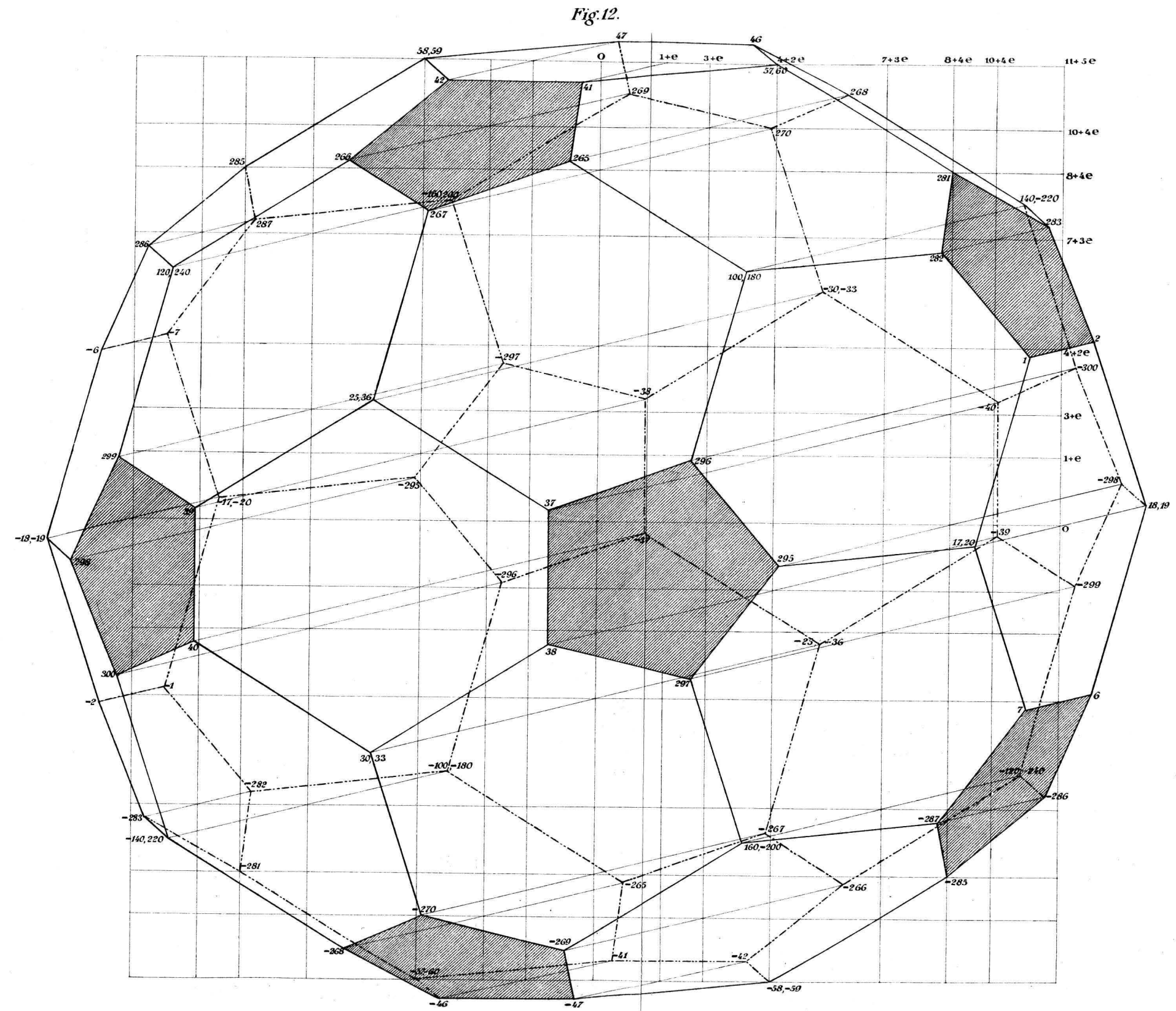
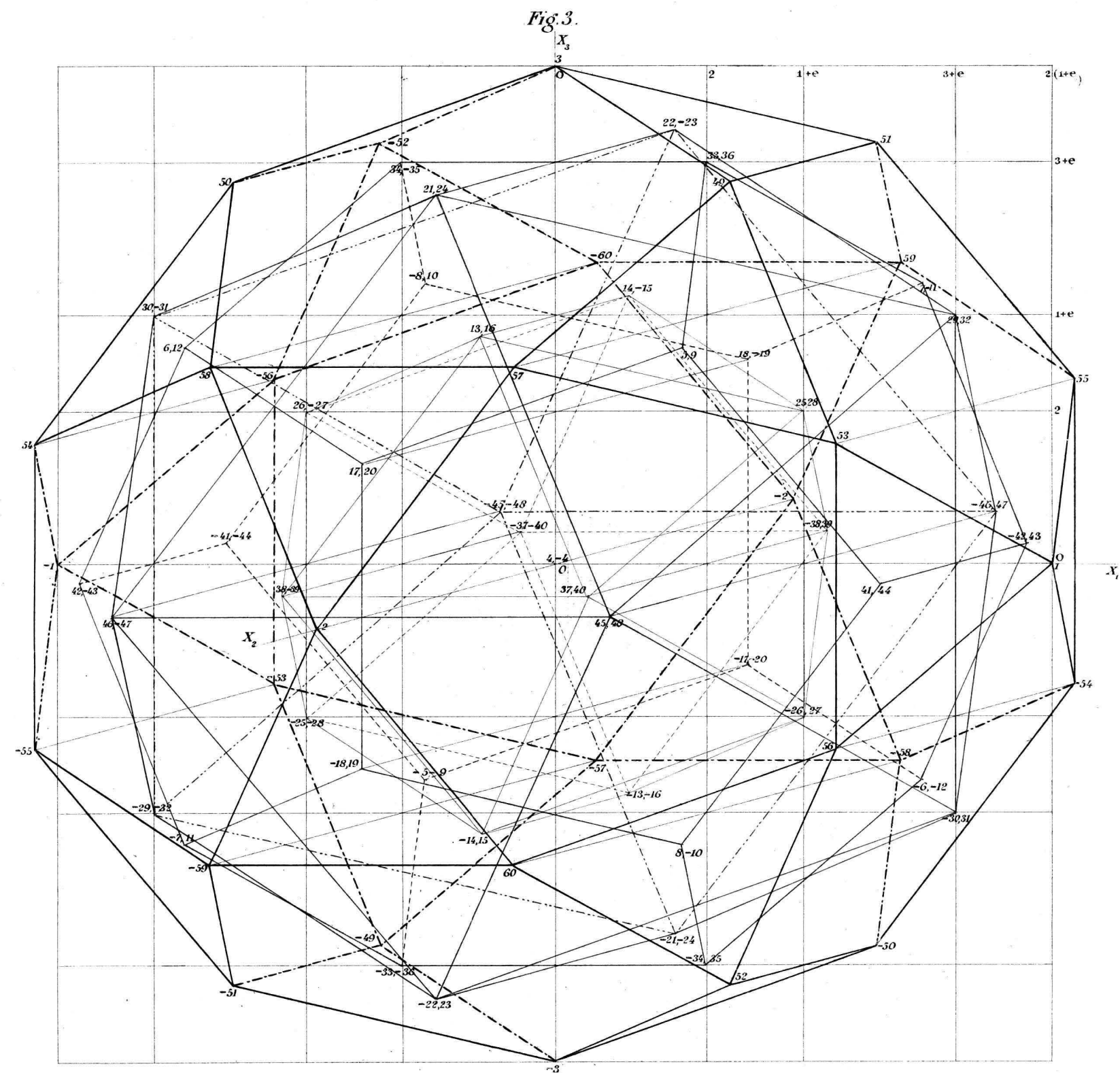


Fig. 6.

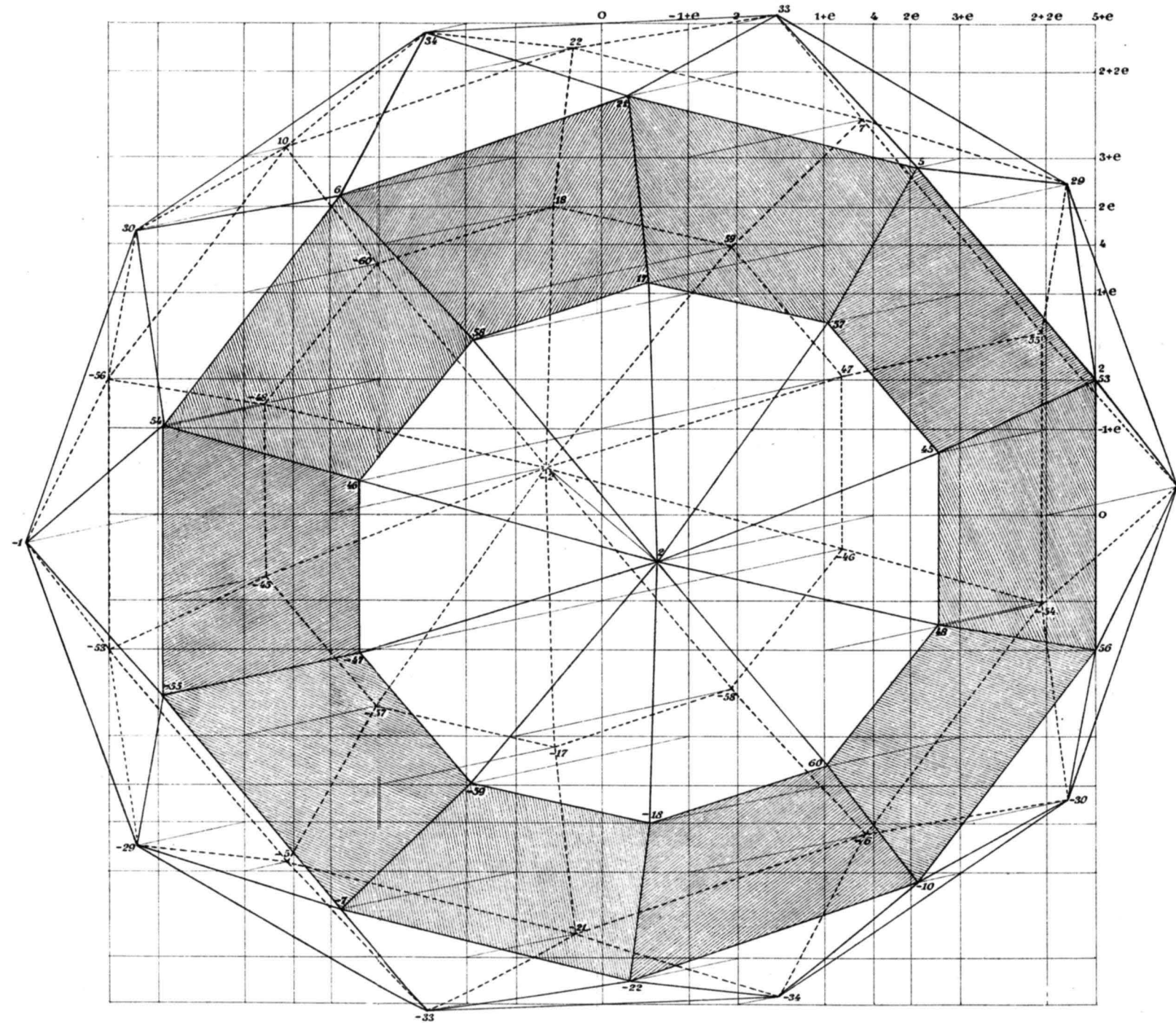


Fig. 6^{bis}

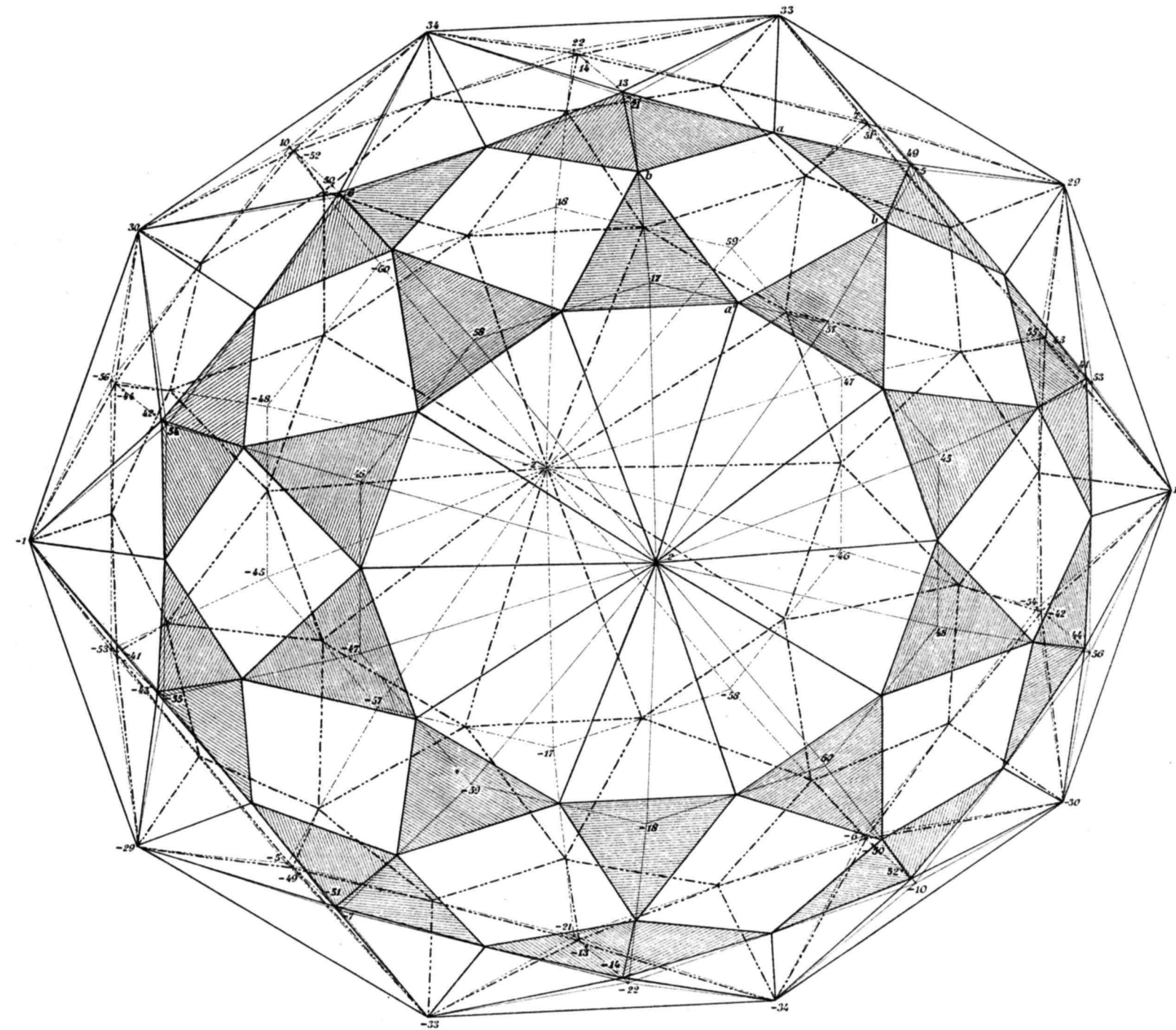


Fig. 14.

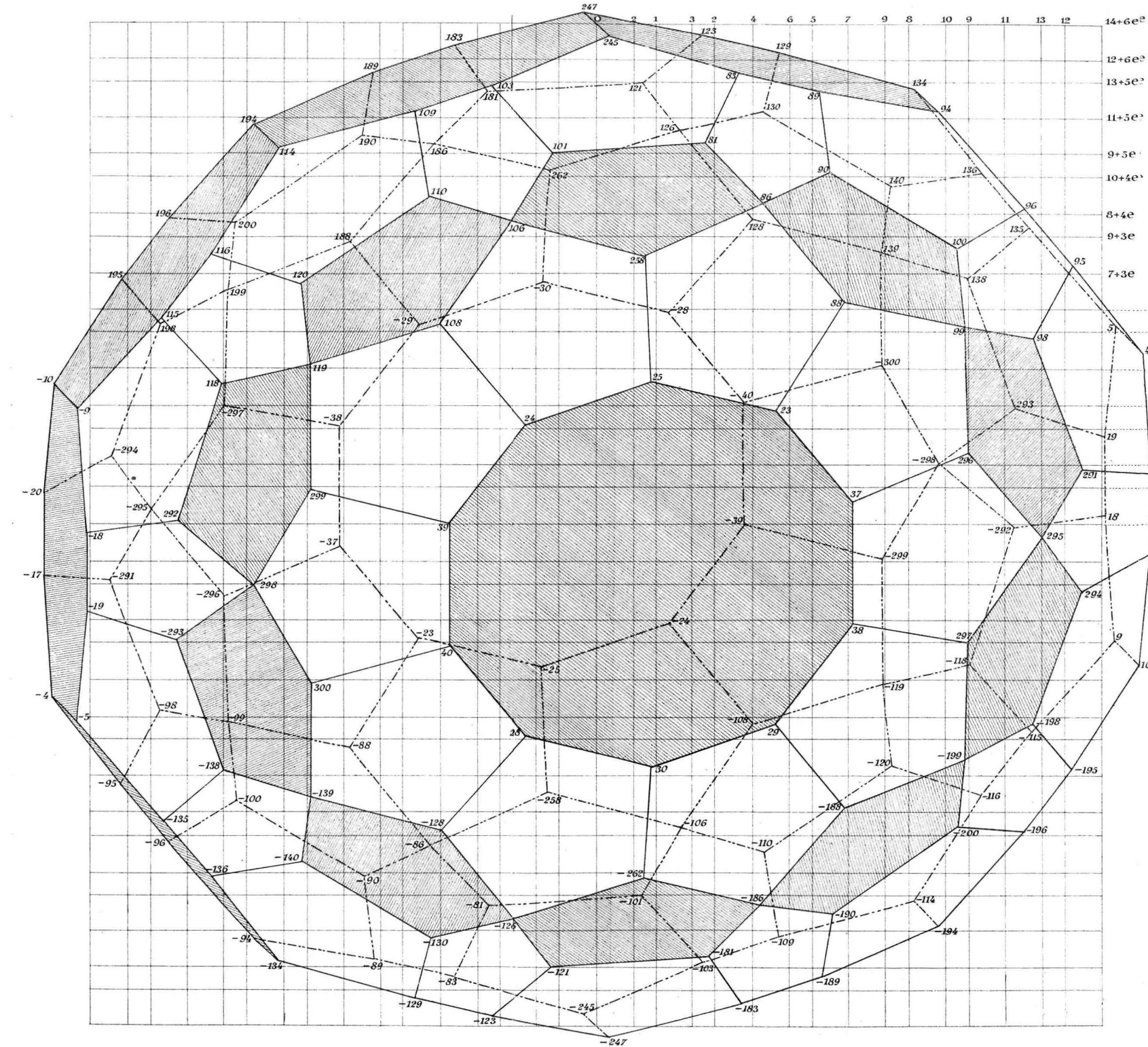


Fig. 14. bis

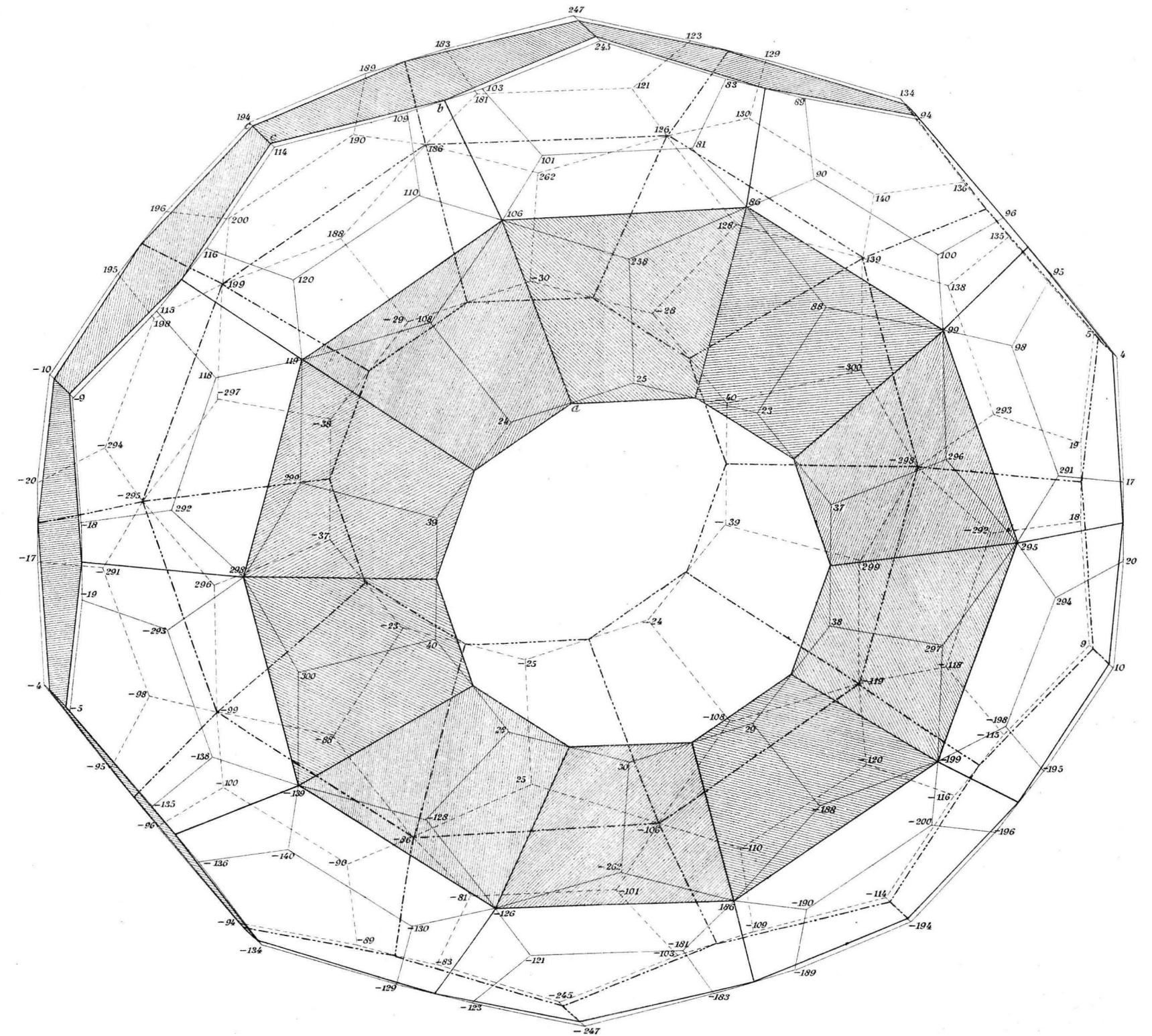


Fig. 16.

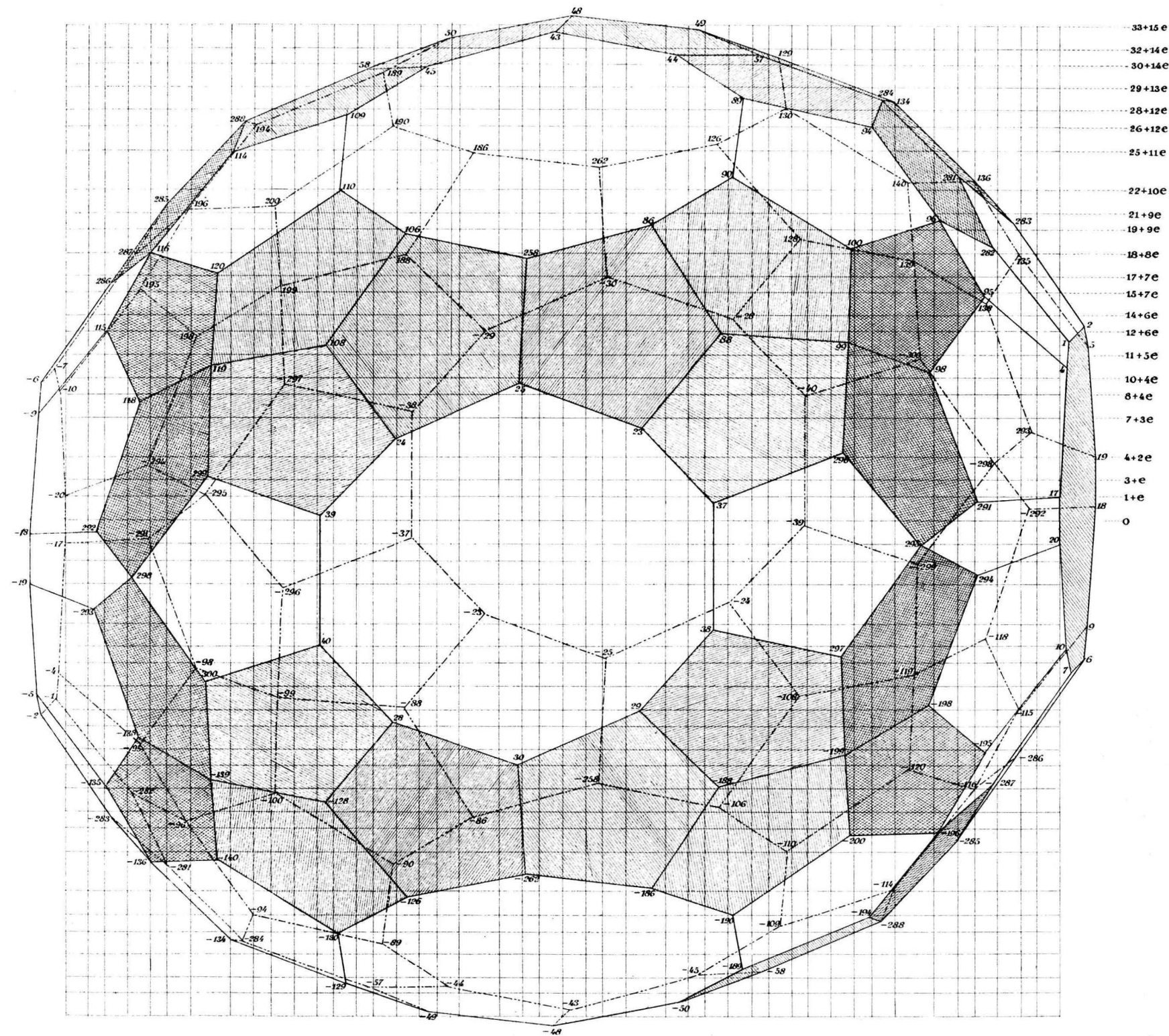


Fig. 16^{bis}.

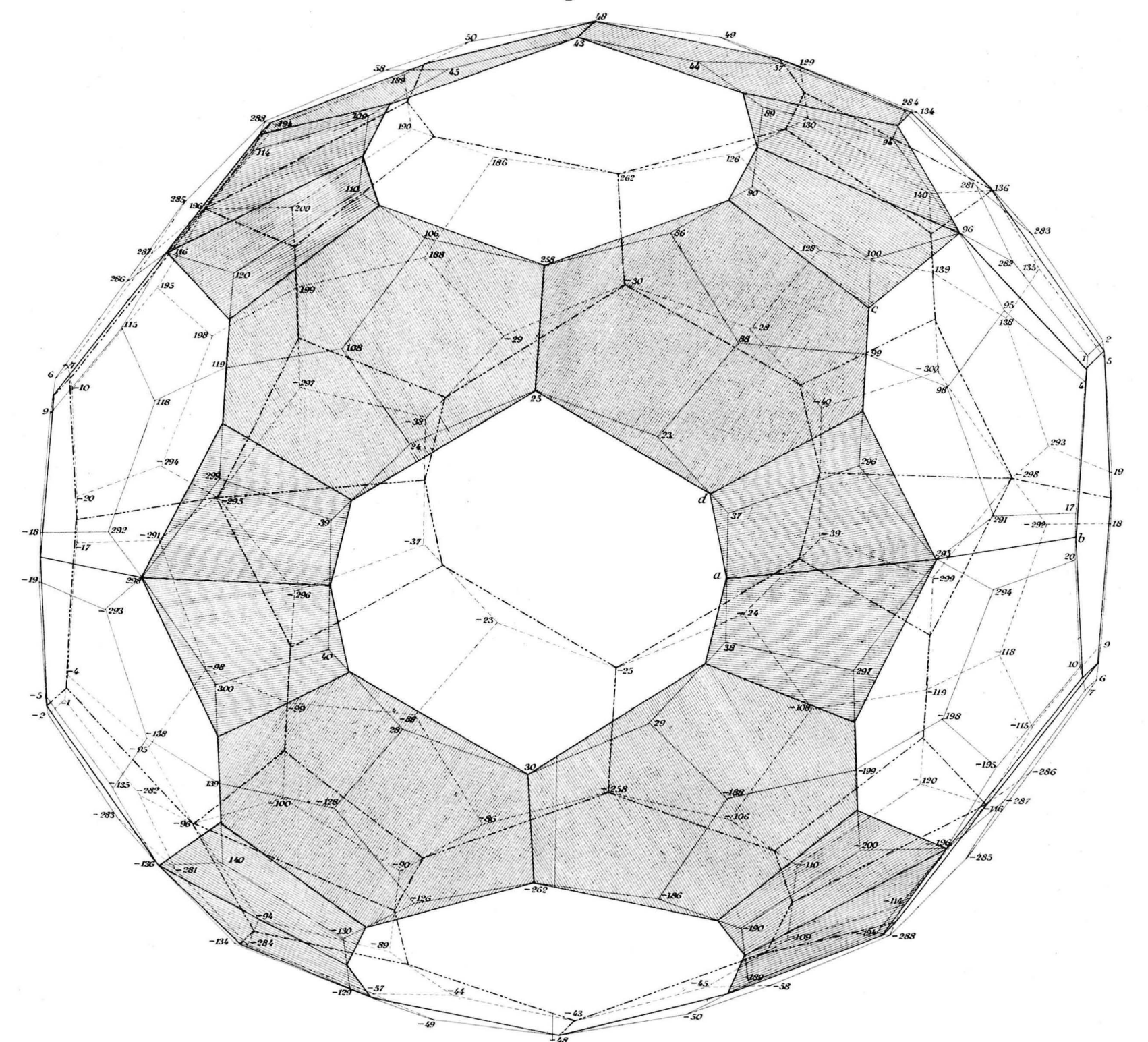


Fig. 19.

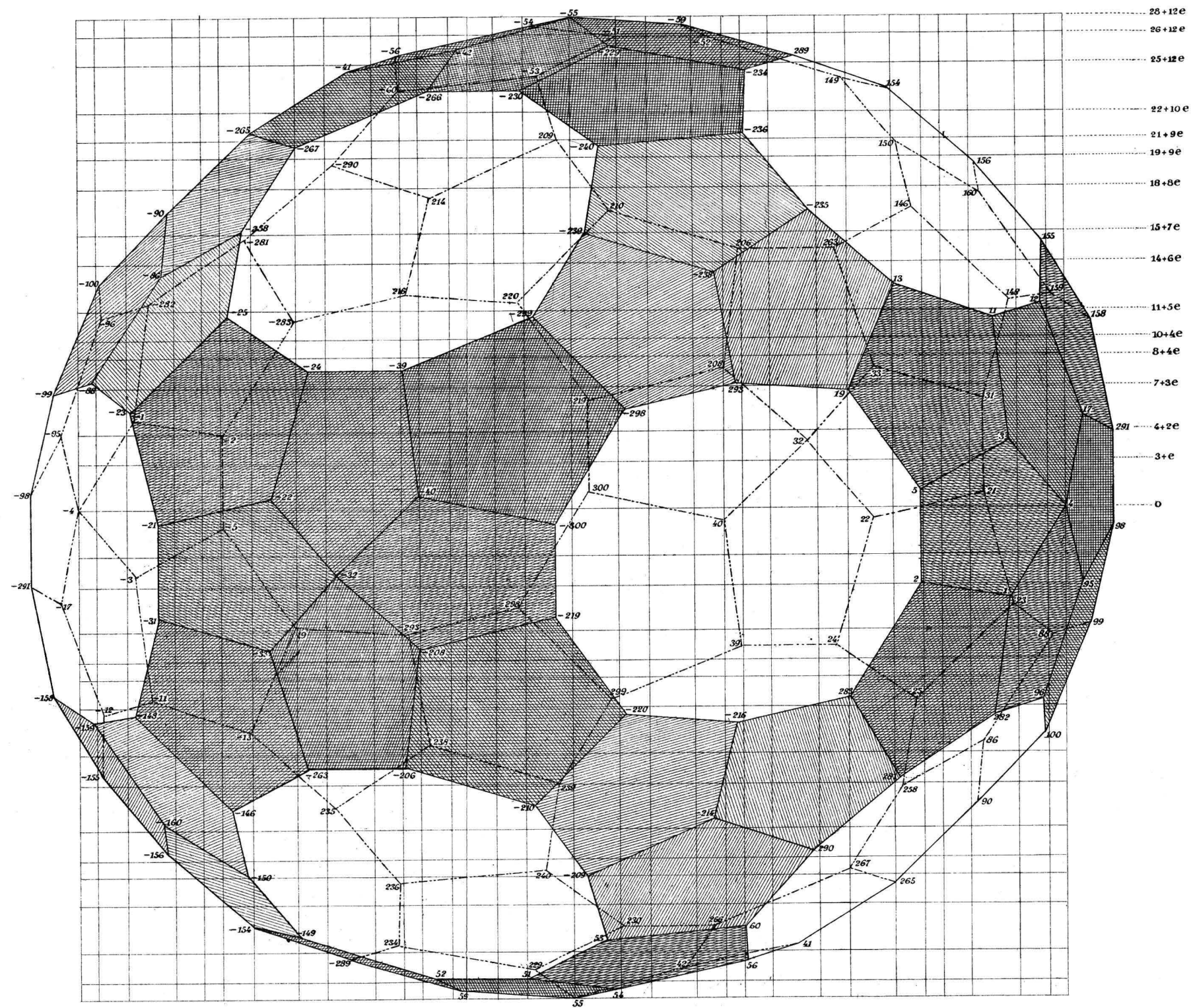
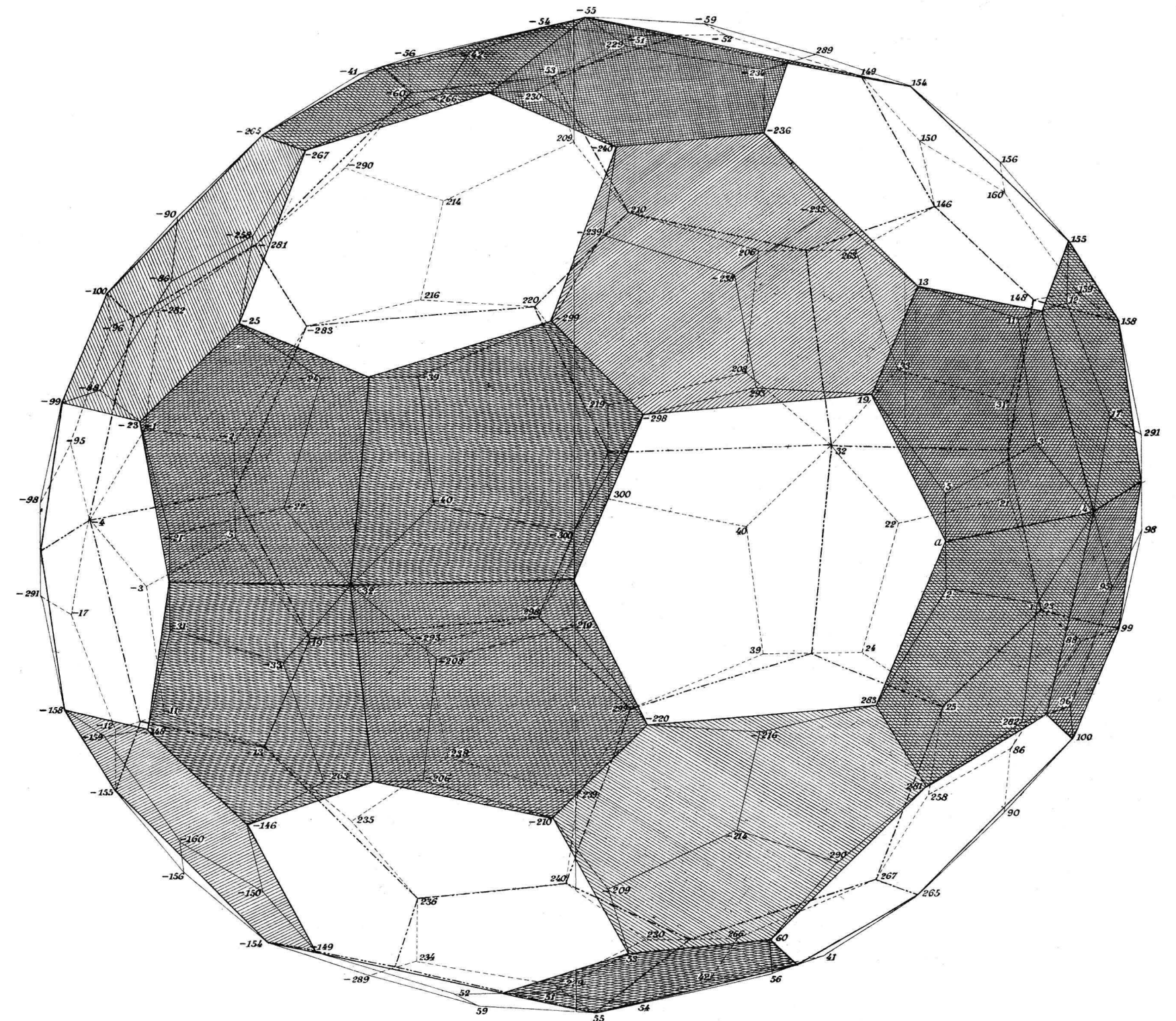


Fig. 19 bis



T A B E L L E I. Koordinatenstellung des Z^{600} .

	A. Zelldiagonale.				B. Erste Querlinie.				C. Zweite Querlinie.				D. Dritte Querlinie.				
	EINHEIT = $\frac{1}{4} a$.				EINHEIT = $\frac{1}{40} a \sqrt{10(5+e)}$				EINHEIT = $\frac{1}{12} a \sqrt{3}$.				EINHEIT = $\frac{1}{16} (e-1) a \sqrt{2}$.				
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	z_1	z_2	z_3	z_4	w_1	w_2	w_3	w_4	
1	2(1+e)	0	0	0	2(1+e)	-4	0	0	2(3+e)	-4	0	0	7+3e	1+e	1+e	1+e	1
2	0	2(1+e)	0	0	4	2(1+e)	0	0	4	2(3+e)	0	0	1+e	-(7+3e)	-(1+e)	1+e	2
3	0	0	2(1+e)	0	0	0	2(1+e)	-4	0	0	2(3+e)	-4	1+e	1+e	-(7+3e)	-(1+e)	3
4	0	0	0	2(1+e)	0	0	4	2(1+e)	0	0	4	2(3+e)	1+e	-(1+e)	1+e	-(7+3e)	4
5	1+e	1+e	1+e	1+e	3+e	-1+e	3+e	-1+e	5+e	1+e	5+e	1+e	5+3e	-(3+e)	-(3+e)	-(3+e)	5
6	-(1+e)	1+e	1+e	1+e	1-e	3+e	3+e	-1+e	-(1+e)	5+e	5+e	1+e	-2	-2(2+e)	-2(2+e)	-2(2+e)	6
7	1+e	-(1+e)	1+e	1+e	-1+e	-(3+e)	3+e	-1+e	1+e	-(5+e)	5+e	1+e	2(2+e)	2(2+e)	-2	-2(2+e)	7
8	1+e	1+e	-(1+e)	1+e	3+e	-1+e	1-e	3+e	5+e	1+e	-(1+e)	5+e	2(2+e)	-2(2+e)	2(2+e)	-2	8
9	1+e	1+e	1+e	-(1+e)	3+e	-1+e	-1+e	-(3+e)	5+e	1+e	1+e	-(5+e)	2(2+e)	-2	-2(2+e)	2(2+e)	9
10	-(1+e)	-(1+e)	1+e	1+e	-(3+e)	1-e	3+e	-1+e	-(5+e)	-(1+e)	5+e	1+e	-(3+e)	3+e	-(3+e)	-(5+3e)	10
11	-(1+e)	1+e	-(1+e)	1+e	1-e	3+e	1-e	3+e	-(1+e)	5+e	-(1+e)	5+e	-(3+e)	-(5+3e)	3+e	-(3+e)	11
12	-(1+e)	1+e	1+e	-(1+e)	1-e	3+e	-1+e	-(3+e)	-(1+e)	5+e	1+e	-(5+e)	-(3+e)	-(3+e)	-(5+3e)	3+e	12
13	0	2	1+e	3+e	-1+e	2	2(1+e)	1+e	-1+e	1+e	2(2+e)	2(1+e)	3+e	-(3+e)	-(3+e)	-(5+3e)	13
14	0	-2	1+e	3+e	1-e	-2	2(1+e)	1+e	1-e	-(1+e)	2(2+e)	2(1+e)	1+e	1+e	-(1+e)	-(7+3e)	14
15	0	2	-(1+e)	3+e	-1+e	2	0	5+e	-1+e	1+e	-2	2(3+e)	2	-2(2+e)	2(2+e)	-2(2+e)	15
16	0	2	1+e	-(3+e)	-1+e	2	0	-(5+e)	-1+e	1+e	2	-2(3+e)	0	0	-2(3+e)	2(3+e)	16
17	0	3+e	2	1+e	1+e	3+e	4	2	1+e	2(2+e)	3+e	4	3+e	-(5+3e)	-(3+e)	-(3+e)	17
18	0	-(3+e)	2	1+e	-(1+e)	-(3+e)	4	2	-(1+e)	-2(2+e)	3+e	4	0	2(3+e)	0	-2(3+e)	18
19	0	3+e	-2	1+e	1+e	3+e	0	2e	1+e	2(2+e)	1-e	2(1+e)	1+e	-(7+3e)	1+e	-(1+e)	19
20	0	3+e	2	-(1+e)	1+e	3+e	0	-2e	1+e	2(2+e)	-1+e	-2(1+e)	2	-2(2+e)	-2(2+e)	2(2+e)	20
21	0	1+e	3+e	2	2	1+e	2(1+e)	1-e	2	3+e	3(1+e)	0	3+e	-(3+e)	-(5+3e)	-(3+e)	21
22	0	-(1+e)	3+e	2	-2	-(1+e)	2(1+e)	1-e	-2	-(3+e)	3(1+e)	0	2	2(2+e)	-2(2+e)	-2(2+e)	22
23	0	1+e	-(3+e)	2	2	1+e	-4	3+e	2	3+e	-(5+e)	2(1+e)	0	-2(3+e)	2(3+e)	0	23
24	0	1+e	3+e	-2	2	1+e	4	-(3+e)	2	3+e	5+e	-2(1+e)	1+e	-(1+e)	-(7+3e)	1+e	24
25	1+e	0	2	3+e	1+e	-2	3+e	4	3+e	-2	2(1+e)	5+e	2(3+e)	0	0	-2(3+e)	25
26	-(1+e)	0	2	3+e	-(1+e)	2	3+e	4	-(3+e)	2	2(1+e)	5+e	-(1+e)	-(1+e)	-(1+e)	-(7+3e)	26
27	1+e	0	-2	3+e	1+e	-2	-1+e	2(1+e)	3+e	-2	0	3(1+e)	2(2+e)	2	2(2+e)	-2(2+e)	27
28	1+e	0	2	-(3+e)	1+e	-2	1-e	-2(1+e)	3+e	-2	0	-3(1+e)	3+e	3+e	-(3+e)	5+3e	28
29	3+e	0	1+e	2	3+e	-(1+e)	2e	0	2(2+e)	-(1+e)	2(1+e)	-1+e	7+3e	1+e	-(1+e)	-(1+e)	29
30	-(3+e)	0	1+e	2	-(3+e)	1+e	2e	0	-2(2+e)	1+e	2(1+e)	-1+e	-2(2+e)	-2	-2(2+e)	-2(2+e)	30
31	3+e	0	-(1+e)	2	3+e	-(1+e)	-2	4	2(2+e)	-(1+e)	-4	3+e	2(3+e)	0	2(3+e)	0	31
32	3+e	0	1+e	-2	3+e	-(1+e)	2	-4	2(2+e)	-(1+e)	4	-(3+e)	5+3e	3+e	-(3+e)	3+e	32
33	2	0	3+e	1+e	2	1-e	5+e	0	1+e	1-e	2(3+e)	2	2(2+e)	2	-2(2+e)	-2(2+e)	33
34	-2	0	3+e	1+e	-2	-1+e	5+e	0	-(1+e)	-1+e	2(3+e)	2	0	0	-2(3+e)	-2(3+e)	34
35	2	0	-(3+e)	1+e	2	1-e	-(1+e)	2(1+e)	1+e	1-e	-2(1+e)	2(2+e)	1+e	-(1+e)	7+3e	-(1+e)	35
36	2	0	3+e	-(1+e)	2	1-e	1+e	-2(1+e)	1+e	1-e	2(1+e)	-2(2+e)	3+e	3+e	-(5+3e)	3+e	36
37	2	1+e	0	3+e	4	2	1+e	3+e	3+e	4	1+e	2(2+e)	2(2+e)	-2(2+e)	2	-2(2+e)	37
38	-2	1+e	0	3+e	0	2e	1+e	3+e	1-e	2(1+e)	1+e	2(2+e)	0	-2(3+e)	0	-2(3+e)	38
39	2	-(1+e)	0	3+e	0	-2e	1+e	3+e	-1+e	-2(1+e)	1+e	2(2+e)	3+e	3+e	3+e	-(5+3e)	39
40	2	1+e	0	-(3+e)	4	2	-(1+e)	-(3+e)	3+e	4	-(1+e)	-2(2+e)	1+e	-(1+e)	-(1+e)	7+3e	40
41	3+e	2	0	1+e	2(1+e)	1-e	2	1+e	3(1+e)	0	2	3+e	7+3e	-(1+e)	1+e	-(1+e)	41
42	-(3+e)	2	0	1+e	-4	3+e	2	1+e	-(5+e)	2(1+e)	2	3+e	-2(2+e)	-2(2+e)	-2	-2(2+e)	42
43	3+e	-2	0	1+e	4	-(3+e)	2	1+e	5+e	-2(1+e)	2	3+e	5+3e	3+e	3+e	-(3+e)	43
44	3+e	2	0	-(1+e)	2(1+e)	1-e	-2	-(1+e)	3(1+e)	0	-2	-(3+e)	2(3+e)	0	0	2(3+e)	44
45	1+e	3+e	0	2	2(1+e)	1+e	-1+e	2	2(2+e)	2(1+e)	-1+e	1+e	2(3+e)	-2(3+e)	0	0	45
46	-(1+e)	3+e	0	2	0	5+e	-1+e	2	-2	2(3+e)	-1+e	1+e	-(1+e)	-(7+3e)	-(1+e)	-(1+e)	46
47	1+e	-(3+e)	0	2	0	-(5+e)	-1+e	2	2	-2(3+e)	-1+e	1+e	3+e	5+3e	3+e	-(3+e)	47
48	1+e	3+e	0	-2	2(1+e)	1+e	1-e	-2	2(2+e)	2(1+e)	1-e	-(1+e)	2(2+e)	-2(2+e)	-2	2(2+e)	48
49	1+e	2	3+e	0	2e	0	3+e	-(1+e)	2(1+e)	-1+e	2(2+e)	-(1+e)	2(3+e)	0	-2(3+e)	0	49
50	-(1+e)	2	3+e	0	-2	4	3+e	-(1+e)	-4	3+e	2(2+e)	-(1+e)	-(1+e)	-(1+e)	-(7+3e)	-(1+e)	50
51	1+e	-2	3+e	0	2	-4	3+e	-(1+e)	4	-(3+e)	2(2+e)	-(1+e)	2(2+e)	2(2+e)	-2(2+e)	-2	51
52	1+e	2	-(3+e)	0	2e	0	-(3+e)	1+e	2(1+e)	-1+e	-2(2+e)	1+e	3+e	-(3+e)	5+3e	3+e	52
53	3+e	1+e	2	0	5+e	0	2	1-e	2(3+e)	2	1+e	1-e	7+3e	-(1+e)	-(1+e)	1+e	53
54	-(3+e)	1+e	2	0	-(1+e)	2(1+e)	2	1-e	-2(1+e)	2(2+e)	1+e	1-e	-2(2+e)	-2(2+e)	-2(2+e)	-2	54
55	3+e	-(1+e)	2	0	1+e	-2(1+e)	2	1-e	2(1+e)	-2(2+e)	1+e	1-e	2(3+e)	2(3+e)	0	0	55
56	3+e	1+e	-2	0	5+e	0	-2	-1+e	2(3+e)	2	-(1+e)	-1+e	5+3e	-(3+e)	3+e	3+e	56
57	2	3+e	1+e	0	3+e	4	1+e	-2	2(1+e)	5+e	3+e	-2	2(2+e)	-2(2+e)	-2(2+e)	2	57
58	-2	3+e	1+e	0	-1+e	2(1+e)	1+e	-2	0	3(1+e)	3+e	-2	0	-2(3+e)	-2(3+e)	0	58
59	2	-(3+e)	1+e	0	1-e	-2(1+e)	1+e	-2	0	-3(1+e)	3+e	-2	1+e	7+3e	-(1+e)	-(1+e)	59
60	2	3+e	-(1+e)	0	3+e	4	-(1+e)	2	2(1+e)	5+e	-(3+e)	2	3+e	-(5+3e)	3+e	3+e	60

T A B E L L E II. Kanten des Z⁶⁰⁰.

1	verbunden	mit	29	—30	31	32		41	—42	43	44		53	—54	55	56							
2	"	"	17	—18	19	20		45	46	—47	48		57	58	—59	60							
3	"	"	21	22	—23	24		33	34	—35	36		49	50	51	—52							
4	"	"	13	14	15	—16		25	26	27	—28		37	38	39	—40							
5	"	"	13	17	21		25	29	33		37	41	45		49	53	57						
6	"	"	13	17	21		26	30	34		38	42	46		50	54	58						
7	"	"	14	18	22		25	29	33		39	43	47		51	55	59						
8	"	"	15	19	23		27	31	35		37	41	45		52	56	60						
9	"	"	16	20	24		28	32	36		40	44	48		49	53	57						
10	"	"	14	18	22		26	30	34	—40	—44	—48		—52	—56	—60							
11	"	"	15	19	23		—28	—32	—36		38	42	46		—51	—55	—59						
12	"	"	16	20	24		—27	—31	—35		—39	—43	—47		50	54	58						
13	"	"	4	5	6		14	17	21		25	26	33	34		37	38						
14	"	"	4	7	10		13	18	22		25	26	33	34		39	—40						
15	"	"	4	8	11		—16	19	23		27	—28	35	—36		37	38						
16	"	"	—4	9	12		—15	20	24		—27	28	—35	36		—39	40						
17	"	"	2	5	6		13	19	21						37	38	45	46	57	58			
18	"	"	—2	7	10		14	—20	22						39	—40	47	—48	59	—60			
19	"	"	2	8	11		15	17	23						37	38	45	46	—59	60			
20	"	"	2	9	12		16	—18	24						—39	40	—47	48	57	58			
21	"	"	3	5	6		13	17	24		33	34						49	50	57	58		
22	"	"	3	7	10		14	18	—23		33	34						51	—52	59	—60		
23	"	"	—3	8	11		15	19	—22		35	—36						—51	52	—59	60		
24	"	"	3	9	12		16	20	21		—35	36						49	50	57	58		
25	"	"	4	5	7		13	14			27	—29	33			37	39	41	43				
26	"	"	4	6	10		13	14			—28	30	34			38	—40	42	—44				
27	"	"	4	8	—12		15	—16			25	31	35			37	39	41	43				
28	"	"	—4	9	—11		—15	16			—26	32	36			—38	40	—42	44				
29	"	"	1	5	7						25	32	33			41	43			49	51	53	55
30	"	"	—1	6	10						26	—31	34			42	—44			50	—52	54	—56
31	"	"	1	8	—12						27	—30	35			41	43			—50	52	—54	56
32	"	"	1	9	—11						28	29	36			—42	44			49	51	53	55
33	"	"	3	5	7		13	14	21	22	25	29	34					49	51				
34	"	"	3	6	10		13	14	21	22	26	30	33					50	—52				
35	"	"	—3	8	—12		15	—16	23	—24	27	31	—36					—50	52				
36	"	"	3	9	—11		—15	16	—23	24	28	32	—35					49	51				
37	"	"	4	5	8		13	15	17	19	25	27				38	41	45					
38	"	"	4	6	11		13	15	17	19	26	—28				37	42	46					
39	"	"	4	7	—12		14	—16	18	—20	25	27				—40	43	47					
40	"	"	—4	9	—10		—14	16	—18	20	—26	28				—39	44	48					
41	"	"	1	5	8						25	27	29	31		37	43	45		53	56		
42	"	"	—1	6	11						26	—28	30	—32		38	—44	46		54	—55		
43	"	"	1	7	—12						25	27	29	31		39	41	47		—54	55		
44	"	"	1	9	—10						—26	28	—30	32		40	—42	48		53	56		
45	"	"	2	5	8		17	19								37	41	48		53	56	57	60
46	"	"	2	6	11		17	19								38	42	—47		54	—55	58	—59
47	"	"	—2	7	—12		18	—20								39	43	—46		—54	55	—58	59
48	"	"	2	9	—10		—18	20								40	44	45		53	56	57	60
49	"	"	3	5	9		21	24			29	32	33	36					51	53	57		
50	"	"	3	6	12		21	24			30	—31	34	—35					—52	54	58		
51	"	"	3	7	—11		22	—23			29	32	33	36					49	55	59		
52	"	"	—3	8	—10		—22	23			—30	31	—34	35					—50	56	60		
53	"	"	1	5	9						29	32				41	44	45	48	49	56	57	
54	"	"	—1	6	12						30	—31				42	—43	46	—47	50	—55	58	
55	"	"	1	7	—11						29	32				—42	43	—46	47	51	—54	59	
56	"	"	1	8	—10						—30	31				41	44	45	48	52	53	60	
57	"	"	2	5	9		17	20	21	24						45	48		49	53	58		
58	"	"	2	6	12		17	20	21	24						46	—47		50	54	57		
59	"	"	—2	7	—11		18	—19	22	—23						—46	47		51	55	—60		
60	"	"	2	8	—10		—18	19	—22	23						45	48		52	56	—59		

T A B E L L E III. Koordinatenstellung des Z^{120} .

A. Ableitung aus den 120 Eckpunkten des Z ⁶⁰⁰ .					B. Verbindungen zu Kanten.				C. Dritte Querlinie. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{2(1+e)}$				D. Zweite Querlinie. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{2\sqrt{10+2e}}$				E. Erste Querlinie. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{2\sqrt{21+9e}}$				F. Zelldiagonale. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{4\sqrt{7+3e}}$				
1	1	29	32	53	2	4	16	282	11+5e	1+e	4+2e	0	13+5e	-(6+2e)	4+2e	-(3+e)	30+14e	-(7+3e)	11+5e	-(4+2e)	26+12e	4+2e	-(4+2e)	4+2e	1
2	"	"	"	55	1	5	15	283	11+5e	-(1+e)	4+2e	0	9+5e	-(8+4e)	4+2e	-(3+e)	28+12e	-(15+7e)	11+5e	-(4+2e)	25+11e	11+5e	-(3+e)	3+e	2
3	"	"	41	43	4	5	11	274	11+5e	0	1+e	4+2e	11+5e	-(7+3e)	4+2e	2+2e	29+13e	-(11+5e)	8+4e	10+4e	26+12e	4+2e	4+2e	-(4+2e)	3
4	"	"	"	53	1	3	17	95	11+5e	3+e	3+e	3+e	12+6e	-(4+2e)	4+2e	2	32+14e	-(4+2e)	10+4e	4+2e	28+12e	0	0	0	4
5	"	"	43	55	2	3	19	135	11+5e	-(3+e)	3+e	3+e	10+4e	-(10+4e)	4+2e	2	26+12e	-(18+8e)	10+4e	4+2e	25+11e	11+5e	3+e	-(3+e)	5
6	"	-30	31	-54	7	9	13	-286	11+5e	-(1+e)	-(4+2e)	0	9+5e	-(8+4e)	-(4+2e)	3+e	28+12e	-(15+7e)	-(11+5e)	4+2e	21+9e	7+3e	15+7e	7+3e	6
7	"	"	"	56	6	10	12	-287	11+5e	1+e	-(4+2e)	0	13+5e	-(6+2e)	-(4+2e)	3+e	30+14e	-(7+3e)	-(11+5e)	4+2e	22+10e	0	14+6e	8+4e	7
8	"	"	-42	44	9	10	14	-278	11+5e	0	-(1+e)	-(4+2e)	11+5e	-(7+3e)	-(4+2e)	-(2+2e)	29+13e	-(11+5e)	-(8+4e)	-(10+4e)	21+9e	7+3e	7+3e	15+7e	8
9	"	"	"	-54	8	6	18	-115	11+5e	-(3+e)	-(3+e)	-(3+e)	10+4e	-(10+4e)	-(4+2e)	-2	26+12e	-(18+8e)	-(10+4e)	-(4+2e)	19+9e	11+5e	11+5e	11+5e	9
10	"	"	44	56	7	8	20	-195	11+5e	3+e	-(3+e)	-(3+e)	12+6e	-(4+2e)	-(4+2e)	-2	32+14e	-(4+2e)	-(10+4e)	-(4+2e)	22+10e	0	8+4e	14+6e	10
11	"	31	41	43	3	12	13	279	11+5e	0	-(1+e)	4+2e	11+5e	-(7+3e)	2	6+2e	29+13e	-(11+5e)	0	12+6e	25+11e	3+e	11+5e	-(3+e)	11
12	"	"	"	56	7	11	17	155	11+5e	3+e	-(3+e)	3+e	12+6e	-(4+2e)	-2	4+2e	32+14e	-(4+2e)	-(4+2e)	10+4e	25+11e	-(3+e)	11+5e	3+e	12
13	"	"	43	-54	6	11	19	-235	11+5e	-(3+e)	-(3+e)	3+e	10+4e	-(10+4e)	-2	4+2e	26+12e	-(18+8e)	-(4+2e)	10+4e	22+10e	8+4e	14+6e	0	13
14	"	32	-42	44	8	15	16	280	11+5e	0	1+e	-(4+2e)	11+5e	-(7+3e)	-2	-(6+2e)	29+13e	-(11+5e)	0	-(12+6e)	22+10e	8+4e	0	14+6e	14
15	"	"	"	55	2	14	18	-215	11+5e	-(3+e)	3+e	-(3+e)	10+4e	-(10+4e)	2	-(4+2e)	26+12e	-(18+8e)	4+2e	-(10+4e)	22+10e	14+6e	0	8+4e	15
16	"	"	44	53	1	14	20	175	11+5e	3+e	3+e	-(3+e)	12+6e	-(4+2e)	2	-(4+2e)	32+14e	-(4+2e)	4+2e	-(10+4e)	25+11e	3+e	-(3+e)	11+5e	16
17	"	41	53	56	4	12	20	291	11+5e	4+2e	0	1+e	14+6e	-(3+e)	2	1+e	33+15e	0	1+e	4+2e	26+12e	-(4+2e)	4+2e	4+2e	17
18	"	-42	-54	55	9	15	19	-292	11+5e	-(4+2e)	0	-(1+e)	8+4e	-(11+5e)	-2	-(1+e)	25+11e	-(22+10e)	-(1+e)	-(4+2e)	21+9e	15+7e	7+3e	7+3e	18
19	"	43	"	"	5	13	18	293	11+5e	-(4+2e)	0	1+e	8+4e	-(11+5e)	2	1+e	25+11e	-(22+10e)	1+e	4+2e	22+10e	14+6e	8+4e	0	19
20	"	44	53	56	10	16	17	294	11+5e	4+2e	0	-(1+e)	14+6e	-(3+e)	-2	-(1+e)	33+15e	0	-(1+e)	-(4+2e)	25+11e	-(3+e)	3+e	11+5e	20
21	2	17	19	45	22	23	31	256	1+e	11+5e	0	4+2e	8+4e	9+5e	3+e	4+2e	15+7e	28+12e	4+2e	11+5e	11+5e	-(25+11e)	-(3+e)	-(3+e)	21
22	"	"	"	46	21	24	32	257	-(1+e)	11+5e	0	4+2e	6+2e	13+5e	3+e	4+2e	7+3e	30+14e	4+2e	11+5e	4+2e	-(26+12e)	-(4+2e)	-(4+2e)	22
23	"	"	45	57	21	25	37	88	3+e	11+5e	3+e	3+e	10+4e	10+4e	4+2e	2	18+8e	26+12e	10+4e	4+2e	14+6e	-(22+10e)	-(8+4e)	0	23
24	"	"	46	58	22	25	39	108	-(3+e)	(11+5e)	3+e	3+e	4+2e	12+6e	4+2e	2	4+2e	32+14e	10+4e	4+2e	3+e	-(25+11e)	-(11+5e)	-(3+e)	24
25	"	"	57	"	23	24	36	258	0	11+5e	4+2e	1+e	7+3e	11+5e	6+2e	-2	11+5e	29+13e	12+6e	0	8+4e	-(22+10e)	-(14+6e)	0	25
26	"	-18	20	-47	27	28	34	-260	-(1+e)	11+5e	0	-(4+2e)	6+2e	13+5e	-(3+e)	-(4+2e)	7+3e	30+14e	-(4+2e)	-(11+5e)	0	-(22+10e)	-(8+4e)	14+6e	26
27	"	"	"	48	26	29	35	-261	1+e	11+5e	0	-(4+2e)	8+4e	9+5e	-(3+e)	-(4+2e)	15+7e	28+12e	-(4+2e)	-(11+5e)	7+3e	-(21+9e)	-(7+3e)	15+7e	27
28	"	"	-47	-59	26	30	40	-128	-(3+e)	11+5e	-(3+e)	-(3+e)	4+2e	12+6e	-(4+2e)	-2	4+2e	32+14e	-(10+4e)	-(4+2e)	-(3+e)	-(25+11e)	-(3+e)	11+5e	28
29	"	"	48	60	27	30	38	-188	3+e	11+5e	-(3+e)	-(3+e)	10+4e	10+4e	-(4+2e)	-2	18+8e	26+12e	-(10+4e)	-(4+2e)	8+4e	-(22+10e)	0	14+6e	29
30	"	"	-59	"	28	29	33	-262	0	11+5e	-(4+2e)	-(1+e)	7+3e	11+5e	-(6+2e)	2	11+5e	29+13e	-(12+6e)	0	3+e	-(25+11e)	3+e	11+5e	30
31	"	19	45	"	21	33	38	148	3+e	11+5e	-(3+e)	3+e	10+4e	10+4e	-2	4+2e	18+8e	26+12e	-(4+2e)	10+4e	11+5e	-(25+11e)	3+e	3+e	31
32	"	"	46	-59	22	33	40	208	-(3+e)	11+5e	-(3+e)	3+e	4+2e	12+6e	-2	4+2e	4+2e	32+14e	-(4+2e)	10+4e	0	-(28+12e)	0	0	32
33	"	"	-59	60	30	31	32	263	0	11+5e	-(4+2e)	1+e	7+3e	11+5e	-(2+2e)	(4+2e)	11+5e	29+13e	-(10+4e)	8+4e	4+2e	-(26+12e)	4+2e	4+2e	33
34	"	20	-47	58	26	36	39	228	-(3+e)	11+5e	3+e	-(3+e)	4+2e	12+6e	2	-(4+2e)	4+2e	32+14e	4+2e	-(10+4e)	0	-(22+10e)	-(14+6e)	8+4e	34
35	"	"	48	57	27	36	37	168	3+e	11+5e	3+e	-(3+e)	10+4e	10+4e	2	-(4+2e)	18+8e	26+12e	4+2e	-(10+4e)	11+5e	-(19+9e)	-(11+5e)	11+5e	35
36	"	"	57	58	25	34	35	264	0	11+5e	4+2e	-(1+e)	7+3e	11+5e	2+2e	-(4+2e)	11+5e	29+13e	10+4e	-(8+4e)					

T A B E L L E III. Koordinatenstellung des Z¹⁰⁰.

A. Ableitung aus den 120 Eckpunkten des Z ¹⁰⁰				B. Verbindungen zu Kanten.				C. Dritte Querlinie. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{2(1+e)}$				D. Zweite Querlinie. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{2\sqrt{10+2e}}$				E. Erste Querlinie. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{2\sqrt{21+2e}}$				F. Zelldiagonale. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{\sqrt{7+2e}}$					
76	4	-16	39	-40	68	74	75	-253	0	-(4+2e)	-(1+e)	11+5e	-(3+e)	-(4+2e)	6+2e	13+5e	-(4+2e)	-(11+5e)	7+3e	30+14e	3+e	3+e	11+5e	-(25+11e)	76
77	"	25	27	37	63	71	78	271	4+2e	1+e	0	11+5e	6+2e	-2	7+3e	11+5e	12+6e	0	11+5e	20+13e	15+7e	-(7+3e)	7+3e	-(21+9e)	77
78	"	"	"	39	66	74	77	272	4+2e	-(1+e)	0	11+5e	2+2e	-(4+2e)	7+3e	11+5e	10+4e	-(8+4e)	11+5e	20+13e	14+6e	0	8+4e	-(22+10e)	78
79	"	26	-28	38	64	72	80	275	-(4+2e)	1+e	0	11+5e	-(2+2e)	4+2e	7+3e	11+5e	-(10+4e)	8+4e	11+5e	20+13e	-(3+e)	-(11+5e)	3+e	-(25+11e)	79
80	"	"	"	-40	67	75	79	276	-(4+2e)	-(1+e)	0	11+5e	-(6+2e)	2	7+3e	11+5e	-(12+6e)	0	11+5e	20+13e	-(4+2e)	-(4+2e)	4+2e	-(26+12e)	80
81	5	13	17	21	82	83	86	101	1+e	7+3e	7+3e	7+3e	5+3e	5+3e	11+5e	3+e	11+5e	17+7e	25+11e	11+5e	14+6e	-(14+6e)	-(14+6e)	-(14+6e)	81
82	"	"	"	37	81	85	87	244	3+e	7+3e	4+2e	8+4e	7+3e	6+2e	10+4e	5+3e	14+6e	15+7e	19+9e	18+8e	15+7e	-(15+7e)	-(7+3e)	-(15+7e)	82
83	"	"	21	33	81	84	89	245	3+e	4+2e	8+4e	7+3e	6+2e	3+e	12+6e	1+e	11+5e	8+4e	20+13e	10+4e	15+7e	-(7+3e)	-(15+7e)	-(15+7e)	83
84	"	"	25	"	83	85	91	241	4+2e	3+e	7+3e	8+4e	5+3e	0	13+5e	4+2e	14+6e	3+e	20+12e	15+7e	18+8e	-(4+2e)	-(10+4e)	-(18+8e)	84
85	"	"	"	37	68	82	84	93	4+2e	4+2e	4+2e	10+4e	7+3e	1+e	9+5e	7+3e	15+7e	7+3e	21+9e	21+9e	18+8e	-(10+4e)	-(4+2e)	-(18+8e)	85
86	"	17	21	57	81	88	90	258	3+e	8+4e	7+3e	4+2e	2+2e	7+3e	10+4e	0	15+7e	19+9e	23+10e	4+2e	15+7e	-(15+7e)	-(7+3e)	-(15+7e)	86
87	"	"	37	45	82	88	97	256	4+2e	8+4e	3+e	7+3e	10+4e	5+3e	7+3e	6+2e	15+7e	19+9e	14+6e	15+7e	18+8e	-(18+8e)	-(4+2e)	-(10+4e)	87
88	"	"	45	57	23	86	87	99	4+2e	10+4e	4+2e	4+2e	9+5e	7+3e	7+3e	1+e	21+9e	21+9e	15+7e	7+3e	18+8e	-(18+8e)	-(10+4e)	-(4+2e)	88
89	"	21	33	49	44	83	90	94	4+2e	4+2e	10+4e	4+2e	7+3e	1+e	13+5e	-(1+e)	15+7e	7+3e	29+13e	1+e	18+8e	-(4+2e)	-(18+8e)	-(10+4e)	89
90	"	"	49	57	86	89	100	265	4+2e	7+3e	8+4e	3+e	8+4e	4+2e	9+5e	-(3+e)	18+8e	14+6e	25+11e	-(1+e)	18+8e	-(10+4e)	-(18+8e)	-(4+2e)	90
91	"	25	29	33	84	92	94	131	7+3e	1+e	7+3e	7+3e	9+3e	-(3+e)	11+5e	3+e	19+9e	-(3+e)	25+11e	11+5e	22+10e	0	-(8+4e)	-(14+6e)	91
92	"	"	"	41	91	93	95	274	8+4e	3+e	4+2e	7+3e	9+5e	-(3+e)	8+4e	4+2e	25+11e	-(1+e)	18+8e	14+6e	25+11e	-(3+e)	-(3+e)	-(11+5e)	92
93	"	"	37	"	85	92	97	271	7+3e	4+2e	3+e	8+4e	10+4e	0	9+3e	7+3e	22+10e	4+2e	15+7e	19+9e	22+10e	-(8+4e)	0	-(14+6e)	93
94	"	29	33	49	89	91	96	284	7+3e	3+e	8+4e	4+2e	8+4e	-(1+e)	11+5e	-2	21+9e	0	26+12e	3+e	22+10e	0	-(14+6e)	-(8+4e)	94
95	"	"	41	53	4	92	96	98	10+4e	4+2e	4+2e	4+2e	13+5e	-(1+e)	7+3e	1+e	29+13e	1+e	15+7e	7+3e	26+12e	-(4+2e)	-(4+2e)	-(4+2e)	95
96	"	"	49	"	94	95	100	282	8+4e	4+2e	7+3e	3+e	11+5e	-2	8+4e	-(1+e)	26+12e	3+e	21+9e	0	25+11e	-(3+e)	-(11+5e)	-(3+e)	96
97	"	37	41	45	87	93	98	157	7+3e	7+3e	1+e	7+3e	11+5e	3+e	5+3e	5+3e	25+11e	11+5e	11+5e	17+7e	22+10e	-(14+6e)	0	-(8+4e)	97
98	"	41	45	53	95	97	99	291	8+4e	7+3e	3+e	4+2e	12+6e	1+e	6+2e	3+e	29+13e	10+4e	11+5e	8+4e	25+11e	-(11+5e)	-(3+e)	-(3+e)	98
99	"	45	53	57	88	98	100	296	7+3e	8+4e	4+2e	3+e	13+5e	4+2e	5+3e	0	26+12e	15+7e	14+6e	3+e	22+10e	-(14+6e)	-(8+4e)	0	99
100	"	49	"	"	90	96	99	180	7+3e	7+3e	7+3e	1+e	11+5e	3+e	9+3e	-(3+e)	25+11e	11+5e	19+9e	-(3+e)	22+10e	-(8+4e)	-(14+6e)	0	100
101	6	13	17	21	81	102	103	106	-(1+e)	7+3e	7+3e	7+3e	3+e	9+3e	11+5e	3+e	3+e	19+9e	25+11e	11+5e	7+3e	-(15+7e)	-(15+7e)	-(15+7e)	101
102	"	"	"	38	101	105	107	244	-(3+e)	7+3e	4+2e	8+4e	1+e	8+4e	10+4e	5+3e	0	21+9e	19+9e	18+8e	4+2e	-(18+8e)	-(10+4e)	-(18+8e)	102
103	"	"	21	34	101	104	109	245	-(3+e)	4+2e	8+4e	7+3e	0	5+3e	12+6e	1+e	-(3+e)	14+6e	20+13e	10+4e	4+2e	-(10+4e)	-(18+8e)	-(18+8e)	103
104	"	"	26	"	103	105	111	242	-(4+2e)	3+e	7+3e	8+4e	-(3+e)	6+2e	13+5e	4+2e	-(8+4e)	11+5e	20+12e	15+7e	0	-(8+4e)	-(14+6e)	-(22+10e)	104
105	"	"	"	38	64	102	104	113	-(4+2e)	4+2e	4+2e	10+4e	-(1+e)	7+3e	9+5e	7+3e	-(7+3e)	15+7e	21+9e	21+9e	0	-(14+6e)	-(8+4e)	-(22+10e)	105
106	"	17	21	58	101	108	110	258	-(3+e)	8+4e	7+3e	4+2e	3+e	9+5e	10+4e	0	1+e	25+11e	22+10e	4+2e	4+2e	-(18+8e)	-(18+8e)	-(10+4e)	106
107	"	"	38	46	102	108	117	257	-(4+2e)	8+4e	3+e	7+3e	2	11+5e	7+3e	6+2e	-(3+e)	20+12e	14+6e	15+7e	0	-(22+10e)	-(8+4e)	-(14+6e)	107
108	"	"	46	58	24	106	107	119	-(4+2e)	10+4e	4+2e	4+2e	1+e	13+5e	7+3e	1+e	-(1+e)	29+13e	15+7e	7+3e	0	-(22+10e)	-(14+6e)	-(8+4e)	108
109	"	21	34	50	45	103	110	114	-(4+2e)	4+2e	10+4e	4+2e	-(1+e)	7+3e	13+5e	-(1+e)	-(7+3e)	15+7e	29+13e	1+e	0	-(8+4e)	-(22+10e)	-(14+6e)	109
110	"	"	50	58	106	109	120	266	-(4+2e)	7+3e	8+4e	3+e	0	10+4e	9+5e	-(3+e)	-(4+2e)	22+10e	25+11e</						

T A B E L L E III. Koordinatenstellung des Z^{120} .

	A. Ableitung aus den 120 Eckpunkten des Z^{600}				B. Verbindungen zu Kanten.				C. Dritte Querlinie. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{2(1+e)}$				D. Zweite Querlinie. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{2\sqrt{10+2e}}$				E. Erste Querlinie. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{2\sqrt{21+9e}}$				F. Zelldiagonale. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{\sqrt{7+3e}}$				
151	8	27	31	35	144	152	154	—231	7+3e	1+e	—(7+3e)	7+3e	9+3e	—(3+e)	—(3+e)	11+5e	19+9e	—(3+e)	—(11+5e)	25+11e	15+7e	—(7+3e)	21+9e	—(7+3e)	151
152	"	"	"	41	151	153	155	279	8+4e	3+e	—(4+2e)	7+3e	9+5e	—(3+e)	0	10+4e	25+11e	—(1+e)	—(4+2e)	22+10e	21+9e	—(7+3e)	15+7e	—(7+3e)	152
153	"	"	37	"	145	152	157	271	7+3e	4+2e	—(3+e)	8+4e	10+4e	0	3+e	9+5e	22+10e	4+2e	1+e	25+11e	19+9e	—(11+5e)	11+5e	—(11+5e)	153
154	"	31	35	52	149	151	156	289	7+3e	3+e	—(8+4e)	4+2e	8+4e	—(1+e)	—(5+3e)	10+4e	21+9e	0	—(18+8e)	19+9e	14+6e	—(8+4e)	22+10e	0	154
155	"	"	41	56	12	152	156	158	10+4e	4+2e	—(4+2e)	4+2e	13+5e	—(1+e)	—(1+e)	7+3e	29+13e	1+e	—(7+3e)	15+7e	22+10e	—(8+4e)	14+6e	0	155
156	"	"	52	"	154	155	160	—287	8+4e	4+2e	—(7+3e)	3+e	11+5e	—2	—(6+2e)	7+3e	26+12e	3+e	—(15+7e)	14+6e	18+8e	—(10+4e)	18+8e	4+2e	156
157	"	37	41	45	97	147	153	158	7+3e	7+3e	—(1+e)	7+3e	11+5e	3+e	3+e	9+3e	25+11e	11+5e	3+e	19+9e	21+9e	—(15+7e)	7+3e	—(7+3e)	157
158	"	41	45	56	155	157	159	291	8+4e	7+3e	—(3+e)	4+2e	12+6e	1+e	0	5+3e	29+13e	10+4e	—(3+e)	14+6e	22+10e	—(14+6e)	8+4e	0	158
159	"	45	56	60	148	158	160	297	7+3e	8+4e	—(4+2e)	3+e	13+5e	4+2e	—(3+e)	6+2e	26+12e	15+7e	—(8+4e)	11+5e	18+8e	—(18+8e)	10+4e	4+2e	159
160	"	52	"	"	150	156	159	—200	7+3e	7+3e	—(7+3e)	1+e	11+5e	3+e	—(5+3e)	5+3e	25+11e	11+5e	—(17+7e)	11+5e	15+7e	—(15+7e)	15+7e	7+3e	160
161	9	16	20	24	162	163	166	221	1+e	7+3e	7+3e	—(7+3e)	5+3e	5+3e	3+e	—(11+5e)	11+5e	17+7e	11+5e	—(25+11e)	7+3e	—(7+3e)	—(21+9e)	15+7e	161
162	"	"	"	40	161	165	167	253	3+e	7+3e	4+2e	—(8+4e)	7+3e	6+2e	—2	—(11+5e)	14+6e	15+7e	3+e	—(26+12e)	7+3e	—(7+3e)	—(15+7e)	21+9e	162
163	"	"	24	36	161	164	169	254	3+e	4+2e	8+4e	—(7+3e)	6+2e	3+e	4+2e	—(13+5e)	11+5e	8+4e	15+7e	—(26+12e)	8+4e	0	—(22+10e)	14+6e	163
164	"	"	28	"	163	165	171	—249	4+2e	3+e	7+3e	—(8+4e)	5+3e	0	1+e	—(12+6e)	14+6e	3+e	10+4e	—(29+13e)	10+4e	4+2e	—(18+8e)	18+8e	164
165	"	"	"	40	—75	162	164	173	4+2e	4+2e	4+2e	—(10+4e)	7+3e	1+e	—(1+e)	—(13+5e)	15+7e	7+3e	1+e	—(29+13e)	8+4e	0	—(14+6e)	22+10e	165
166	"	20	24	57	161	168	170	264	3+e	8+4e	7+3e	—(4+2e)	9+3e	7+3e	4+2e	—(8+4e)	15+7e	19+9e	14+6e	—(18+8e)	11+5e	—(11+5e)	—(19+9e)	11+5e	166
167	"	"	40	48	162	168	177	—261	4+2e	8+4e	3+e	—(7+3e)	10+4e	5+3e	—(1+e)	—(8+4e)	19+9e	18+8e	0	—(21+9e)	11+5e	—(11+5e)	—(11+5e)	19+9e	167
168	"	"	48	57	35	166	167	179	4+2e	10+4e	4+2e	—(4+2e)	9+5e	7+3e	1+e	—(7+3e)	21+9e	21+9e	7+3e	—(15+7e)	14+6e	—(14+6e)	—(14+6e)	14+6e	168
169	"	24	36	49	56	163	170	174	4+2e	4+2e	10+4e	—(4+2e)	7+3e	1+e	7+3e	—(9+5e)	15+7e	7+3e	21+9e	—(21+9e)	14+6e	0	—(22+10e)	8+4e	169
170	"	"	49	57	166	169	180	265	8+4e	7+3e	8+4e	—(3+e)	8+4e	4+2e	7+3e	—(9+3e)	18+8e	14+6e	19+9e	—(15+7e)	15+7e	—(7+3e)	—(21+9e)	7+3e	170
171	"	28	32	36	164	172	174	—211	7+3e	1+e	7+3e	—(7+3e)	9+3e	—(3+e)	3+e	—(11+5e)	19+9e	—(3+e)	11+5e	—(25+11e)	15+7e	7+3e	—(15+7e)	15+7e	171
172	"	"	"	44	171	173	175	280	8+4e	3+e	4+2e	—(7+3e)	9+5e	—(3+e)	0	—(10+4e)	25+11e	—(1+e)	4+2e	—(22+10e)	18+8e	4+2e	—(10+4e)	18+8e	172
173	"	"	40	"	165	172	177	—276	7+3e	4+2e	3+e	—(8+4e)	10+4e	0	—(3+e)	—(9+5e)	22+10e	4+2e	—(1+e)	—(25+11e)	14+6e	0	—(8+4e)	22+10e	173
174	"	32	36	49	169	171	176	290	7+3e	3+e	8+4e	—(4+2e)	8+4e	—(1+e)	5+3e	—(10+4e)	21+9e	0	—(18+8e)	—(19+9e)	18+8e	4+2e	—(18+8e)	10+4e	174
175	"	"	44	53	16	172	176	178	10+4e	4+2e	4+2e	—(4+2e)	13+5e	—(1+e)	1+e	—(7+3e)	29+13e	1+e	7+3e	—(15+7e)	22+10e	0	—(8+4e)	14+6e	175
176	"	"	49	"	174	175	180	282	8+4e	4+2e	7+3e	—(3+e)	11+5e	—2	6+2e	—(7+3e)	26+12e	3+e	15+7e	—(14+6e)	22+10e	0	—(14+6e)	8+4e	176
177	"	40	44	48	167	173	178	—197	7+3e	7+3e	1+e	—(7+3e)	11+5e	3+e	—(3+e)	—(9+5e)	25+11e	11+5e	—(3+e)	—(19+9e)	15+7e	—(7+3e)	—(7+3e)	21+9e	177
178	"	44	48	53	175	177	179	294	8+4e	7+3e	3+e	—(4+2e)	12+6e	1+e	0	—(5+3e)	29+13e	10+4e	3+e	—(14+6e)	21+9e	—(7+3e)	—(7+3e)	15+11e	178
179	"	48	53	57	168	178	180	296	7+3e	8+4e	4+2e	—(3+e)	13+5e	4+2e	3+e	—(6+2e)	26+12e	15+7e	8+4e	—(11+5e)	19+9e	—(11+5e)	—(11+5e)	11+5e	179
180	"	49	"	"	100	170	176	179	7+3e	7+3e	7+3e	—(1+e)	11+5e	3+e	5+3e	—(5+3e)	25+11e	11+5e	17+7e	—(11+5e)	21+9e	—(7+3e)	—(15+7e)	7+3e	180
181	10	14	18	22	121	182	183	186	—(1+e)	—(7+3e)	7+3e	7+3e	—(5+3e)	—(5+3e)	11+5e	3+e	—(11+5e)	—(17+7e)	25+11e	11+5e	0	14+6e	—(8+4e)	—(22+10e)	181
182	"	"	"	—40	181	185	187	246	—(3+e)	—(7+3e)	4+2e	8+4e	—(7+3e)	—(6+2e)	10+4e	5+3e	—(14+6e)	—(15+7e)	19+9e	18+8e	—(3+e)	11+5e	—(3+e)	—(25+11e)	182
183	"	"	22	34	181	184	189	247	—(3+e)	—(4+2e)	8+4e	7+3e	—(6+2e)	—(3+e)	12+6e	1+e	—(11+5e)	—(8+4e)	29+13e	10+4e	0</				

T A B E L L E III. Koordinatenstellung des Z^{100} .

A. Ableitung aus den 120 Eckpunkten des Z^{100}				B. Verbindungen zu Kanten.				C. Dritte Querlinie. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{2(1+e)}$				D. Zweite Querlinie. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{2\sqrt{10+2e}}$				E. Erste Querlinie. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{2\sqrt{21+9e}}$				F. Zelldiagonale. EINHEIT = $\frac{\text{Kante}}{\sqrt{7+8e}}$					
226	12	20	24	58	221	228	230	264	-(3+e)	8+4e	7+3e	-(4+2e)	3+e	9+5e	4+2e	-(8+4e)	1+e	25+11e	14+8e	-(18+8e)	0	-(14+8e)	-(22+10e)	8+4e	226
227	"	"	-39	-47	222	228	237	-260	-(4+2e)	8+4e	3+e	-(7+3e)	2	11+5e	-(1+e)	-(8+4e)	-(3+e)	26+12e	0	-(21+9e)	-(7+3e)	-(15+7e)	-(15+7e)	15+7e	227
228	"	"	-47	58	34	226	227	239	-(4+2e)	10+4e	4+2e	-(4+2e)	1+e	13+5e	1+e	-(7+3e)	-(1+e)	20+13e	7+3e	-(15+7e)	-(4+2e)	-(18+8e)	-(18+8e)	10+4e	228
229	"	24	-35	50	55	223	230	234	-(4+2e)	4+2e	10+4e	-(4+2e)	-(1+e)	7+3e	7+3e	-(9+5e)	-(7+3e)	15+7e	21+9e	-(21+9e)	-(4+2e)	-(4+2e)	-(26+12e)	4+2e	229
230	"	"	50	58	226	229	240	266	-(4+2e)	7+3e	8+4e	-(3+e)	0	10+4e	7+3e	-(9+5e)	-(4+2e)	22+10e	19+9e	-(15+7e)	-(3+e)	-(11+5e)	-(25+11e)	8+4e	230
231	"	-27	-31	-35	-151	224	232	234	-(7+3e)	1+e	7+3e	-(7+3e)	-(5+3e)	5+3e	3+e	-(11+5e)	-(17+7e)	11+5e	11+5e	-(25+11e)	-(14+8e)	0	-(22+10e)	8+4e	231
232	"	"	"	-43	231	233	235	-279	-(8+4e)	3+e	4+2e	-(7+3e)	-(7+3e)	9+3e	0	-(10+4e)	-(10+4e)	15+7e	4+2e	-(22+10e)	-(18+8e)	-(4+2e)	-(18+8e)	10+4e	232
233	"	"	-39	"	225	232	237	-272	-(7+3e)	4+2e	3+e	-(8+4e)	-(4+2e)	8+4e	-(3+e)	-(9+5e)	-(14+8e)	18+8e	-(1+e)	-(25+11e)	-(15+7e)	-(7+3e)	-(15+7e)	15+7e	233
234	"	-31	-35	50	229	231	236	-289	-(7+3e)	3+e	8+4e	-(4+2e)	-(6+2e)	7+3e	5+3e	-(10+4e)	-(15+7e)	14+8e	18+8e	-(10+4e)	-(11+5e)	-(3+e)	-(25+11e)	3+e	234
235	"	"	-43	54	-13	232	236	238	-(10+4e)	4+2e	4+2e	-(4+2e)	-(7+3e)	9+5e	1+e	-(7+3e)	-(21+9e)	21+9e	7+3e	-(15+7e)	-(18+8e)	-(10+4e)	-(18+8e)	4+2e	235
236	"	"	50	"	234	235	240	286	-(8+4e)	4+2e	7+3e	-(3+e)	-(5+3e)	10+4e	6+2e	-(7+3e)	-(18+8e)	19+9e	15+7e	-(14+8e)	-(14+8e)	-(8+4e)	-(22+10e)	0	236
237	"	39	-43	-47	-137	227	233	238	-(7+3e)	7+3e	1+e	-(7+3e)	-(3+e)	11+5e	-(3+e)	-(9+5e)	-(11+5e)	25+11e	-(3+e)	-(10+4e)	-(14+8e)	-(14+8e)	-(14+8e)	14+8e	237
238	"	-43	-47	54	235	237	239	-293	-(8+4e)	7+3e	3+e	-(4+2e)	-(4+2e)	11+5e	0	-(5+3e)	-(15+7e)	26+12e	3+e	-(14+8e)	-(15+7e)	-(15+7e)	-(15+7e)	7+3e	238
239	"	-47	54	58	228	238	240	299	-(7+3e)	8+4e	4+2e	-(3+e)	-(1+e)	12+6e	3+e	-(6+2e)	-(10+4e)	20+13e	8+4e	-(11+5e)	-(10+4e)	-(18+8e)	-(18+8e)	4+2e	239
240	"	50	"	"	120	230	236	239	-(7+3e)	7+3e	7+3e	-(1+e)	-(3+e)	11+5e	5+3e	-(5+3e)	-(11+5e)	25+11e	17+7e	-(11+5e)	-(5+4e)	-(14+8e)	-(22+10e)	0	240
241	13	14	25	33	61	84	124	243	3+e	0	7+3e	10+4e	3+e	-(1+e)	12+6e	6+2e	7+3e	-(3+e)	28+12e	18+8e	14+8e	0	-(8+4e)	-(22+10e)	241
242	"	"	26	34	62	104	184	243	-(3+e)	0	7+3e	10+4e	-(3+e)	1+e	12+6e	6+2e	-(7+3e)	3+e	28+12e	18+8e	3+e	-(3+e)	-(11+5e)	-(25+11e)	242
243	"	"	33	"	241	242	245	247	0	0	8+4e	8+4e	0	0	14+6e	2+2e	0	0	30+14e	14+8e	8+4e	0	-(14+8e)	-(22+10e)	243
244	"	17	37	38	65	82	102	255	0	7+3e	3+e	10+4e	4+2e	7+3e	8+4e	9+3e	7+3e	18+8e	17+7e	22+10e	10+4e	-(18+8e)	-(4+2e)	-(18+8e)	244
245	"	21	33	34	43	83	103	243	0	3+e	10+4e	7+3e	1+e	8+e	14+6e	2	3+e	7+3e	32+14e	8+4e	10+4e	-(4+2e)	-(18+8e)	-(18+8e)	245
246	14	18	39	-40	68	122	182	259	0	-(7+3e)	3+e	10+4e	-(4+2e)	-(7+3e)	8+4e	9+3e	-(7+3e)	-(18+8e)	17+7e	22+10e	3+e	11+5e	3+e	-(25+11e)	246
247	"	22	33	34	48	123	183	243	0	-(3+e)	10+4e	7+3e	-(1+e)	-(3+e)	14+6e	2	-(3+e)	-(7+3e)	32+14e	8+4e	7+3e	7+3e	-(15+7e)	-(21+9e)	247
248	15	-16	27	35	69	144	-224	250	3+e	0	-(7+3e)	10+4e	3+e	-(1+e)	-2	14+6e	7+3e	-(3+e)	-(8+4e)	32+14e	7+3e	-(7+3e)	21+9e	-(15+7e)	248
249	"	"	-28	-36	70	-164	204	250	-(3+e)	0	-(7+3e)	10+4e	-(3+e)	1+e	-2	14+6e	-(7+3e)	3+e	-(8+4e)	32+14e	-(4+2e)	-(10+4e)	18+8e	-(18+8e)	249
250	"	"	35	"	248	249	252	-254	0	0	-(8+4e)	8+4e	0	0	-(2+2e)	14+6e	0	0	-(14+8e)	30+14e	0	-(8+4e)	22+10e	-(14+8e)	250
251	"	19	37	38	73	142	202	255	0	7+3e	-(3+e)	10+4e	4+2e	7+3e	2+2e	11+5e	7+3e	18+8e	3+e	28+12e	7+3e	-(21+9e)	7+3e	-(15+7e)	251
252	"	23	35	-36	-51	143	203	250	0	3+e	-(10+4e)	7+3e	1+e	3+e	-(6+2e)	12+6e	3+e	7+3e	-(18+8e)	28+12e	0	-(14+8e)	22+10e	-(8+4e)	252
253	16	20	-39	40	-76	162	222	-259	0	7+3e	3+e	-(10+4e)	4+2e	7+3e	-(2+2e)	-(11+5e)	7+3e	18+8e	-(3+e)	-(28+12e)	0	-(8+4e)	-(14+8e)	22+10e	253
254	"	24	-35	36	54	163	223	-260	0	3+e	10+4e	-(7+3e)	1+e	3+e	6+2e	-(12+6e)	3+e	7+3e	18+8e	-(28+12e)	3+e	3+e	-(25+11e)	11+5e	254
255	17	19	37	38	244	251	256	257	0	8+4e	0	8+4e	6+2e	8+4e	6+2e	8+4e	8+4e	22+10e	8+4e	22+10e	8+4e	-(22+10e)	0	-(14+8e)	255
256	"	"	"	45	21	87	147	255	3+e	10+4e	0	7+3e	8+4e	9+3e	4+2e	7+3e	17+7e	22+10e	7+3e	18+8e	14+8e	-(22+10e)	0	-(8+4e)	256
257	"	"	38	46	22	107	207	255	-(3+e)	10+4e	0	7+3e	2+2e	11+5e	4+2e	7+3e	3+e	28+12e	7+3e	18+8e	3+e	-(25+11e)	-(3+e)	-(11+5e)	257
258	"	21	27	58	25	86	106	267	0	10+4e	7+3e	3+e	5+3e	10+4e	8+4e	-(1+e)	10+4e	25+11e	21+9e	0	10+4e	-(18+8e)	-(18+8e)	-(4+2e)	258
259	18	-20	39	-40	246	-253	260	261	0	-(8+4e)	0	8+4e	-(6+2e)	-(6+4e)	6+2e	8+4e	-(8+4e)	-(22+10e)	8+4e	22+10e	0	22+10e	8+4e	-(22+10e)	259
260	"	"	"	47	-26	127	-227	259	3+e	-(10+4e)	0	7+3e	-(2+2e)	-(11+5e)	4+2e	7+3e	-(3+e)	-(28+12e)	7+3e	18+8e	4+2e	18+8e	10+4e	-(18+8e)	260
261	18	-20	-40	-48	-37	-167	187	259	-(3+e)	-(10+4e)	0	7+3e	-(8+4e)	-(9+3e)	4+2e	7+3e	-(17+7e)	-(22+10e)	7+3e	18+8e	-(7+3e)	15+7e	7+3e	-(21+9e)	261
262	"	22	59	-60	-30	126	186	270	0	-(10+4e)	7+3e	3+e	-(5+3e)	-(10+4e)	8+4e	-(1+e)	-(10+4e)	-(25+11e)	21+9e	0	0	22+10e	-(8+4e)	-(14+8e)	262
263	19	23	-59	60	33	146	206	-270	0	10+4e	-(7+3e)	3+e	5+3e	10+4e	-(6+2e)	7+3e	10+4e	25+11e	-(15+7e)	14+8e	3+e	-(25+11e)	11+5e	3+e	263
264	20	24	57	58	36	166	226	267	0	10+4e	7+3e	-(3+e)	5+3e	10+4e	6+2e	-(7+3e)	10+4e	25+11e	15+7e	-(14+8e)	7+3e	-(21+9e)	-(21+9e)	7+3e	264
265	21	"	49	57	41	90	170	267	3+e	7+3e	10+4e	0	7+3e	6+2e	10+4e	-(5+3e)	14+8e	15+7e	25+11e	-(10+4e)	14+6e	-(8+4e)	-(22+10e)	0	265
266	"	"	50	58	42	110	230	267	-(3+e)	7+3e	10+4e	0	1+e	8+4e	10+4e	-(5+3e)	0	21+9e	25+11e	-(10+4e)	3+e	-(11+5e)	-(25+11e)	-(3+e)	266
267	"	"	57	"	258	264	265	266	0	8+4e	8+4e	0	6+2e	8+4e	8+4e	-(6+2e)	8+4e	22+10e	22+10e	-(8+4e)	8+4e	-(14+8e)	-(22+10e)	0	267
268	22	-23	51	59	46	130	-210	270	3+e	-(7+3e)	10+4e	0	-(1+e)	-(8+4e)	10+4e	-(5+3e)	0	-(21+9e)	25+11e	-(10+4e)	7+3e	21+9e	-(15+7e)	-(7+3e)	268
269	"	"	-52	-60	47	-150	190	270	-(3+e)	-(7+3e)	10+4e	0	-(7+3e)	-(6+2e)	10+4e	-(5+3e)	-(14+8e)	-(15+7e)	25+11e	-(10+4e)	-(4+2e)	15+8e	-(18+8e)	-(10+4e)	269
270	"	"	59	"	262	-263	268	269	0	-(8+4e)	8+4e	0	-(6+2e)	-(8+4e)	8+4e	-(6+2e)	-(22+10e)	22+10e	-(8+4e)	0	22+10e	-(14+8e)	-(8+4e)	-(8+4e)	270
271	25	27	37	41	77	93	153	273	7+3e	3+e	0	10+4e	8+4e	-(1+e)	5+3e	10+4e	21+9e	0	10+4e	25+11e	21+9e	-(7+3e)	7+3e	-(15+7e)	271
272	"	"	39	43	78	133	-233	273	7+3e	-(3+e)	0	10+4e	6+2e	-(7+3e)	5+3e	10+4e	15+7e	-(14+8e)	10+4e	25+11e	18+8e	4+2e	10+4e	-(18+8e)	272
273	"	"	41	"	271	272	274	279	8+4e	0	0	8+4e	8+4e	-(6+2e)	6+2e	8+4e	22+10e	-(8+4e)	8+4e	22+10e	22+10e	0	8+4e	-(14+8e)	273
274	"	29	"	"	3	92	132	273	10+4e	0	3+e	7+3e	10+4e	-(5+3e)	7+3e	6+2e	25+11e	-(10+4e)	14+8e	15+7e	25+11e	3+e	3+e	-(11+5e)	274
275	26	-28	38	42	79	113	213	277	-(7+3e)	3+e	0	10+4e	-(6+2e)	7+3e	5+3e	10+4e	-(15+7e)	14+8e	10+4e	25+11e	-(8+4e)	-(14+8e)	0	-(22+10e)	275
276	"	"	-40	-44	80	-173	193	277	-(7+3e)	-(3+e)	0	10+4e	-(8+4e)	1+e	5+3e	10+4e	21+9e	0	10+4e	25+11e	-(11+5e)	-(3+e)	3+e	-(25+11e)	276
277	"	"	42	"	275	276	278	-280	-(8+4e)	0	0	8+4e	-(8+4e)	6+2e	6+2e	8+4e	-(22+10e)	8+4e	8+4e	22+10e	-(14+8e)	-(8+4e)	0	-(22+10e)	277