

Luca Zoppetti

Analisi Matematica 2

per il corso di Fisica dell'Università di Bologna

Ho scritto questo piccolo riassunto del corso di “Analisi Matematica 2” nel tentativo di fare ordine nei miei appunti per la preparazione dell’esame. L’obiettivo del presente documento è quindi quello di essere un supporto per lo studio e non un libro completo in merito alla materia. Consiglio di integrare quanto scritto qui con gli appunti del docente e con libri di testo esterni. Per quanto riguarda i contenuti, sono presenti tutti gli argomenti affrontati nell’anno accademico 2023-2024, comprese le dimostrazioni svolte a lezione. Avviso inoltre che, seppur sia stato controllato numerose volte, questo riassunto potrebbe non essere esente da refusi. Sarò grato a chiunque decida di segnalarmeli personalmente o tramite gli *Issues* della [repository](#) su GitHub. Tutto quello che pubblico sulla mia pagina è gratuito e ad uso libero per il proprio studio, tuttavia se apprezzassi il mio lavoro e ti andasse di offrirmi un caffè, questo è il mio profilo PayPal: paypal.me/lucazoppetti. Buono studio!

9 settembre 2024

Indice

1	Topologia negli spazi metrici	5
1	Elementi di topologia	5
2	Chiusura, interno e frontiera	6
3	Spazi normati	8
4	Successioni	9
2	Funzioni fra spazi metrici	11
1	Funzioni e regolarità	11
2	Spazi metrici completi	12
3	Proprietà delle funzioni continue	13
3	Calcolo differenziale per funzioni in più variabili	14
1	Funzioni differenziabili	14
2	Derivate di ordine superiore	16
3	Punti critici liberi	17
3.1	Forme quadratiche	18
3.2	Classificazione dei punti critici	18
4	Calcolo differenziale per funzioni a valori vettoriali	20
1	Funzioni derivabili e differenziabili	20
2	Varietà regolari	21
3	Teorema di Dini	21
4	Estremanti condizionati	23
5	Teoria della misura e dell'integrazione	26
1	Misura di Peano-Jordan	26
2	Integrazione secondo Riemann	28
2.1	Integrali doppi	29
2.2	Integrali tripli	30
2.3	Cambiamento di variabile nell'integrale multiplo	31
6	Curve e lavoro	33
1	Curve in forma parametrica	33
2	Integrali curvilinei	34
3	Lavoro	35
4	Campi vettoriali conservativi	36
7	Integrali di superficie	38
1	Superfici	38
2	Teorema di Stokes	39
3	Teorema di Gauss	40
8	Misura e integrazione secondo Lebesgue	42
1	Misura di Lebesgue	42
1.1	Metodo di Carathéodory	44
2	Integrale di Lebesgue	45
2.1	Lebesgue e i limiti di successioni	47

Capitolo 1

Topologia negli spazi metrici

1 Elementi di topologia

Definizione 1.1 (Spazio metrico) Si consideri un insieme X e una funzione $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ con le seguenti proprietà $\forall x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si definisce spazio metrico la coppia (X, d) . Esempi di spazio metrico sono i seguenti:

- $\mathbb{R}^n$ con la metrica p , di cui la metrica euclidea è il caso con $p = 2$: $d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$
- $\mathbb{R}^n$ con la metrica delta: $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ 1 & \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \end{cases}$
- $X = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue}\}$ con la metrica a infinito: $d_\infty(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$

Definizione 1.2 (Topologia) Si consideri un insieme X e una famiglia¹ di suoi sottoinsiemi τ . La coppia (X, τ) è uno spazio topologico se τ , che nel caso è detta topologia, ha le seguenti proprietà:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $A_\alpha \in \tau \forall \alpha \implies \bigcup_{\alpha} A_\alpha \in \tau$ (unione anche infinita)
3. $A_1, \dots, A_k \in \tau$ con $k \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{j=1}^k A_j \in \tau$ (intersezione finita)

Definizione 1.3 (Intorno circolare aperto o palla aperta) Sia dato $x_0 \in X$. Si definisce intorno circolare aperto di x_0 di raggio $r > 0$ l'insieme $B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$.

Definizione 1.4 (Insieme aperto) $A \subseteq X$ è un insieme aperto se $\forall x \in A \exists r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$.

Proposizione 1.1 Ogni intorno circolare aperto è un aperto in (X, d) . □

Definizione 1.5 (Insieme chiuso) $A \subseteq X$ è un insieme chiuso se il suo complementare $X \setminus A$ è un insieme aperto.

Osservazione Esistono insiemi che non sono né aperti né chiusi.

Proposizione 1.2 (Proprietà degli insiemi chiusi) Gli insiemi chiusi hanno le seguenti proprietà:

¹Una famiglia consiste in un insieme, detto insieme di indici, e in una mappa che ad ogni indice associa un unico elemento della famiglia.

1. $\emptyset, X$ sono insiemi chiusi

2. $A_1, \dots, A_k \in X$ con $k \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{j=1}^k A_j$ è un insieme chiuso (unione finita)

3. $A_\lambda, \lambda \in \Lambda^2 \implies \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ è un insieme chiuso (intersezione anche infinita) $\square$

Definizione 1.6 (Distanza di un punto da un insieme) Sia (X, d) spazio metrico. Si considerino $A \subseteq X, x \in X$. La distanza di x da A è $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$.

Definizione 1.7 (Insieme limitato) Sia (X, d) uno spazio metrico. $A \subseteq X$ si dice limitato se $\exists M > 0, x_0 \in X$ tale che $A \subseteq B_M(x_0)$.

Definizione 1.8 (Insieme connesso) Sia (X, d) uno spazio metrico. $Y \subseteq X$ è connesso se non esiste una partizione propria di Y , ovvero se non esistono due aperti disgiunti $A_1, A_2 \in X$ tali che:

- $A_1, A_2 \neq \emptyset$
- $Y \cap A_1, Y \cap A_2 \neq \emptyset$
- $(Y \cap A_1) \cup (Y \cap A_2) = Y$

In altre parole, significa che non è possibile separare i punti di Y usando due aperti in modo non banale.

Definizione 1.9 (Ricoprimento) Sia (X, τ) uno spazio topologico. Si definisce ricoprimento di A una famiglia $U_\alpha, \alpha \in \Lambda$ con $U_\alpha \in \tau \forall \alpha$ (quindi aperti rispetto a τ) tale che $A \subseteq \bigcup_{\alpha} U_\alpha$. Si dice sottoricoprimento (finito) una sottofamiglia (finita) di U_α che sia ancora ricoprimento di A .

Definizione 1.10 (Insieme compatto) Sia (X, τ) uno spazio topologico. $A \subseteq X$ è compatto se da ogni ricoprimento di A è possibile estrarre un sottoricoprimento finito di A .

Teorema 1.3 (di Heine-Borel) Si consideri $(\mathbb{R}^n, d_2)$, ovvero lo spazio euclideo. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se A è limitato e chiuso. $\square$

2 Chiusura, interno e frontiera

Definizione 2.1 (Chiusura di un insieme) Sia (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Si dice chiusura dell'insieme A e si indica con $\overline{A}$ l'insieme chiuso più piccolo contenente A , ovvero $\overline{A} = \bigcap \{C \subseteq X : C \text{ è chiuso}, C \supseteq A\}$.

Definizione 2.2 (Interno di un insieme) Sia (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Si dice interno dell'insieme A e si indica con $\mathring{A}$ l'insieme aperto più grande contenuto in A , ovvero $\mathring{A} = \bigcup \{U \subseteq X : U \text{ è aperto}, U \subseteq A\}$.

Proposizione 2.1 Sia (X, d) uno spazio metrico. $A \subseteq X, x, y \in X \implies |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Dimostrazione. Sia $z \in A$. Allora, per le proprietà della distanza (Def. 1.1), $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \implies |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$. Passando all'estremo inferiore, per la Definizione 1.6 si ottiene la tesi: $\inf_{z \in A} |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \implies |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. $\square$

Definizione 2.3 (Diametro) Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Si dice diametro di A $\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$.

Definizione 2.4 (Punto aderente a un insieme) Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. $x \in X$ è aderente ad A se $\forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

Definizione 2.5 (Punto di frontiera) Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. $x \in X$ è di frontiera per A se è aderente sia ad A che a $X \setminus A$.

Definizione 2.6 (Frontiera) La frontiera dell'insieme A , indicata con ∂A , è l'insieme dei punti di frontiera per l'insieme A .

²Con Λ si indica un insieme di indici, anche infinito, per l'insieme X .

Definizione 2.7 (Punto interno) Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. $x_0 \in A$ è interno ad A se $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x_0) \subseteq A$.

Teorema 2.2 (di caratterizzazione della chiusura) Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Allora:

1. $A \subseteq \overline{A}$
2. $A, B \subseteq X \implies \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
4. A chiuso $\iff A = \overline{A}$
5. $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$
6. $\overline{A} = \{x \in X : x \text{ aderente ad } A\}$

Dimostrazione. Si dimostra ciascun punto separatamente.

1. Ovvio per definizione.
2. $A, B \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$ per il punto 1 del teorema.
Dato che i chiusi che contengono $A \cup B$ contengono sia A che B , $\overline{A}, \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \implies \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.
Viceversa, $A \subseteq \overline{A}, B \subseteq \overline{B} \implies A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \implies \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.
Di conseguenza, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. $\overline{A}$ è chiuso, quindi è ovvio usando la definizione.
4. Segue dal punto 3 del teorema e dalle definizioni di chiuso e chiusura.

I punti 5 e 6 non vengono dimostrati, tuttavia si può notare che se x è punto di aderenza per A , allora $\forall \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \iff d(x, A) = 0$. In altre parole, i punti 5 e 6 sono equivalenti fra loro. $\square$

Teorema 2.3 (di caratterizzazione di $\mathring{A}, \overline{A}, \partial A$) Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Allora:

1. $\mathring{A} = \{x \in A : x \text{ è punto interno ad } A\}$
2. $\mathring{A} = A \setminus \partial A$
3. $\overline{A} = A \cup \partial A$
4. $\partial A = \partial(X \setminus A) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A}$ (si noti che ∂A è un insieme chiuso)
5. A è chiuso $\iff A \supseteq \partial A$

Dimostrazione. Si dimostra ciascun punto separatamente.

1. $x \in \mathring{A} \subseteq A \implies \exists U$ aperto $\subseteq X$ tale che $x \in U \subseteq A \implies \exists B_\varepsilon(x) \subseteq U \subseteq A$, ovvero x è punto interno ad A . Viceversa, se $x \in A$ è punto interno $\exists B_\varepsilon(x) \subseteq A$, quindi $x \in \mathring{A}$.
2. $x \in A \setminus \partial A$, quindi $x \in A$. Poiché $x \notin \partial A$, definendo $\delta = d(x, X \setminus A) > 0$, $\forall 0 < \varepsilon < \delta \ B_\varepsilon(x) \subseteq A \implies x \in \mathring{A} \implies A \setminus \partial A \subseteq \mathring{A}$.
Viceversa, se $x \in \mathring{A} \subseteq A \ \exists B_\varepsilon(x) \subseteq A \implies d(x, X \setminus A) \geq \varepsilon > 0$, quindi $x \notin \partial A$, cioè $\mathring{A} \subseteq A \setminus \partial A$.
Di conseguenza, $\mathring{A} = A \setminus \partial A$.
3. $x \in A \cup \partial A$, allora o $x \in A \subseteq \overline{A}$ o $x \in X \setminus A$ e x aderente ad A . In entrambi i casi, per il teorema 2.2 $x \in \overline{A}$, ovvero $A \cup \partial A \subseteq \overline{A}$.
Viceversa, se $x \in \overline{A}$ allora x è aderente ad A (sempre per il teorema 2.2). Si verificano due casi:
 - a. $x \in A$. Non c'è nient'altro da dimostrare.
 - b. $x \in X \setminus A$, ma x dev'essere aderente ad A , quindi $x \in \partial A$.

Da questo segue che $\overline{A} \subseteq A \cup \partial A \implies \overline{A} = A \cup \partial A$.

4. Ovviamente, $\partial A = \partial(X \setminus A)$, per cui $\overline{X \setminus A} = (X \setminus A) \cup \partial(X \setminus A) = (X \setminus A) \cup \partial A$. Considerando che $\overline{A} = A \cup \partial A$, si vede facilmente che $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \supseteq \partial A$. Si vuole ora dimostrare l'uguaglianza fra questi due insiemi. Se $x \notin \partial A$ si presentano due casi:

$$\text{a. } x \in A \text{ e } d(x, X \setminus A) > 0 \implies x \notin \overline{X \setminus A}$$

$$\text{b. } x \in X \setminus A \text{ e } d(x, A) > 0 \implies x \notin \overline{A}$$

In entrambi i casi, $x \notin \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, quindi $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

5. Segue dal punto 3 del teorema e dal teorema 2.2. A chiuso $\iff A = \overline{A} = A \cup \partial A \iff A \supseteq \partial A$. □

Definizione 2.8 (Punto di accumulazione) Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione per A se $\forall \varepsilon > 0$ $(B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$.

Osservazione Si presentano due casi:

- Se $x_0 \in A$, si richiede che ogni intorno circolare di A contenga punti di A distinti da x_0
- Se $x_0 \notin A$, si richiede che sia aderente ad A , ovvero che $x_0 \in \partial A$

Definizione 2.9 (Derivato di un insieme) Si definisce derivato di A e si indica con $D(A)$ l'insieme dei punti di accumulazione di A .

Teorema 2.4 (di Bolzano-Weierstrass) *Si consideri lo spazio metrico euclideo $(\mathbb{R}^n, d_2)$. Ogni insieme infinito e limitato possiede almeno un punto di accumulazione.* □

Proposizione 2.5 Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Allora

1. $D(A) \subseteq \overline{A}$
2. $\overline{A} = A \cup D(A)$

Dimostrazione del punto 2. Sia $x \in \overline{A} = A \cup \partial A \implies$ o $x \in A$ oppure $x \notin A$ e $x \in X \setminus A$ è aderente ad A . Questo significa che $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$, cioè che x è un punto di accumulazione per A . Quindi $\overline{A} \subseteq A \cup D(A)$.

Viceversa, se $x \in A \cup D(A)$ ci sono due casi: o $x \in A$ oppure $x \in X \setminus A$ e $x \in D(A) \implies x \in \partial A \implies x \in \overline{A}$. Quindi $A \cup D(A) \subseteq \overline{A}$, da cui la tesi. □

Definizione 2.10 (Punto isolato) $x \in A$ è un punto isolato di A se $x \notin D(A)$, ovvero se non è un punto di accumulazione per A .

3 Spazi normati

Definizione 3.1 (Norma) Sia X uno spazio vettoriale definito sul campo $\mathbb{K}$. $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$ è una norma se soddisfa le seguenti proprietà $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

I seguenti sono esempi di norme:

- La norma euclidea in $\mathbb{R}^n$: $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- La norma a infinito in $\mathbb{R}^n$: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$

Definizione 3.2 (Prodotto interno) Sia X uno spazio vettoriale definito sul campo $\mathbb{K}$. $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è detto prodotto interno se soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\forall \mathbf{x} \in X, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ e $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
3. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$

$$4. \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

Osservazione Si noti che la struttura di spazio vettoriale dotato di prodotto interno induce automaticamente la struttura di spazio normato, che a sua volta induce una distanza e quindi una topologia sull'insieme.

Definizione 3.3 (Ortogonale) Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Si dice che $\mathbf{x}$ è ortogonale a $\mathbf{y}$ e si scrive $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

4 Successioni

Definizione 4.1 (Successione in uno spazio metrico) Sia (X, d) uno spazio metrico. Si definisce successione $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Si definisce insieme dei valori della successione l'insieme $\{x_n\}$ dove $x_n = f(n)$.

Definizione 4.2 (Successione convergente) Siano (X, d) uno spazio metrico, $a \in X$ e $x_n \in X \forall n \in \mathbb{N}$. Si dice che x_n converge ad a rispetto a d se $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, a) = 0$, cioè $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, a) < \varepsilon \forall n \geq m$.

Osservazione In $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono equivalenti, cioè se una successione di elementi in $\mathbb{R}^n$ converge rispetto a una norma allora converge rispetto a qualunque altra norma.

Definizione 4.3 (Successione di funzioni) Si chiama successione di funzioni una successione definita da $\mathbb{N}$ all'insieme $X = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.

Definizione 4.4 (Convergenza uniforme) Si dice che f_n converge uniformemente a f e si indica con $f_n \rightrightarrows f$ se $d_\infty(f_n, f) = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Definizione 4.5 (Convergenza in media) Si dice che f_n converge in media a f se $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_1(f_n, f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I |f_n(t) - f(t)| dt = 0$.

Definizione 4.6 (Convergenza puntuale) Si dice che f_n converge puntualmente a f e si indica con $f_n \rightarrow f$ se $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = f(t) \forall t \in I$.

Teorema 4.1 (Proprietà della convergenza uniforme) Siano $f_n, f \in B(I, \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ limitate}\}$ e sia che $f_n \rightrightarrows f$. Allora:

1. Se f_n è continua $\forall n$ in $I \implies f$ è continua in I
2. f_n converge puntualmente a f
3. Se I è un insieme limitato e $\int_I |f_n(t)| dt < +\infty \forall n \implies \int_I |f(t)| dt < +\infty$ e $f_n \xrightarrow{d_1} f$ (ovvero, f_n converge in media a f)

Dimostrazione. Si dimostra ciascun punto separatamente.

1. Sia x_0 un punto fissato nell'intervallo I e x un generico punto appartenente allo stesso intervallo. Allora

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per la Definizione 4.4 di convergenza uniforme $\exists \bar{n}$ tale che $\forall n > \bar{n}$,

$$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq 2 \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| < 2\varepsilon$$

Inoltre, per la continuità di f_n $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$. In conclusione, $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, che è la definizione di continuità.

2. $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

3. Si dimostra la convergenza in media di f_n a f .

$$\int_I |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_I \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| dx = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \cdot |I| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La prima affermazione si dimostra invece come segue:

$$\int_I |f(t)| dt \leq \int_I [|f_n(t) - f(t)| + |f_n(t)|] dt = \int_I |f_n(t) - f(t)| dt + \int_I |f_n(t)| dt < +\infty$$

Il primo termine può essere considerato piccolo a piacere, e in ogni caso limitato, perché f_n converge in media a f . Il secondo termine invece è limitato per ipotesi.

□

Teorema 4.2 (Scambio fra limite e derivata) *Siano $f_n, f, f'_n, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f_n \rightrightarrows f$ e $f'_n \rightrightarrows g$. Allora f è derivabile in I e $f'(t) = g(t)$.*

□

Capitolo 2

Funzioni fra spazi metrici

1 Funzioni e regolarità

Definizione 1.1 (Funzione fra spazi metrici) Siano $(X, d_x), (Y, d_y)$ spazi metrici. Si dice funzione $f : X \rightarrow Y$ che a $x \in X$ associa $y = f(x) \in Y$.

Definizione 1.2 (Funzione continua fra spazi metrici) Siano $(X, d_x), (Y, d_y)$ spazi metrici. $f : X \rightarrow Y$ si dice continua se $\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \forall x \in X$ tale che $d_x(x, x_0) < \delta$.

Teorema 1.1 (Caratterizzazioni equivalenti della continuità) Siano $(X, d_x), (Y, d_y)$ spazi metrici. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1. f è continua da X in Y
2. f trasforma successioni convergenti in X in successioni convergenti in Y , cioè $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in X \forall n$ tale che $\exists x \in X$ per cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_x(x_n, x) = 0$, si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_y(f(x), f(x_n)) = 0$.
3. $\forall x \in X, \forall V \subseteq Y$ intorno circolare aperto di $f(x)$, $\exists U \subseteq X$ intorno circolare aperto di x tale che $f(U) \subseteq V$.
4. $\forall V$ aperto in Y , $f^{-1}(V)$ è aperto in X , dove $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$. □

Osservazione Si noti che il punto 4 del teorema fa uso esclusivamente del concetto di insieme aperto senza fare riferimento alle strutture metriche, ma solo alla struttura topologica. Esso costituisce la definizione di continuità in spazi topologici non metrici.

Definizione 1.3 (Uniforme continuità) Siano $(X, d_x), (Y, d_y)$ spazi metrici. $f : X \rightarrow Y$ si dice uniformemente continua se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \forall x, x_0 \in X$ tale che $d_x(x, x_0) < \delta$.

Osservazione Il concetto di uniforme continuità rende il valore di δ indipendente dalla scelta di x_0 . Esso dipende quindi solo dalla scelta di ε .

Definizione 1.4 (Funzione lipschitziana) Siano $(X, d_x), (Y, d_y)$ spazi metrici. $f : X \rightarrow Y$ si dice lipschitziana se $\exists L > 0$ tale che $d_y(f(x), f(x_0)) \leq L d_x(x, x_0)$. Se $L < 1$, f si chiama contrazione.

Definizione 1.5 (Isometria) Siano $(X, d_x), (Y, d_y)$ spazi metrici. $f : X \rightarrow Y$ è un'isometria se $\forall x, y \in X$ $d_y(f(x), f(y)) = d_x(x, y)$.

Teorema 1.2 (Relazioni fra regolarità delle funzioni) Siano $(X, d_x), (Y, d_y)$ spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$. Allora:

1. Se f è uniformemente continua, allora è continua.
2. Se f è lipschitziana, allora è uniformemente continua.
3. Se f è un'isometria, allora è lipschitziana. □

Teorema 1.3 (Caratterizzazione della chiusura tramite successioni) *Si consideri lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, d)$ e sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora*

$$x \in \overline{A} \iff \exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in A \forall k \in \mathbb{N} \text{ tale che } d(x, x_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Dimostrazione. Sia $x \in \overline{A} \implies x$ è aderente ad A , cioè $\forall \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Sia $\varepsilon = 1/k$. Si può definire una successione tale che $x_k \in B_{1/k}(x) \cap A$, quindi tale che $d(x_k, x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

Viceversa, siano $x_k \in A, x \in X$ tali che $d(x, x_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. Allora $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) \leq d(x, x_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \implies x \in \overline{A}$ $\square$

Teorema 1.4 (Compattezza per successioni) *Si consideri lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, d)$. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto $\iff \forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in A \forall k \in \mathbb{N}$ esiste una sottosuccessione x_{k_m} convergente in A .*

Dimostrazione. Sia A compatto e $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in A . Si presentano due casi:

- L'insieme dei valori della successione è finito, ovvero $\exists y_1, \dots, y_p \in A$ tali che $\forall k \ x_k \in \{y_1, \dots, y_p\}$. Sia $N_j = \{k \in \mathbb{N} : x_k = y_j\}$ con $j = 1, \dots, p$. Almeno uno degli N_j è numerabile, si supponga in $j = \bar{j}$. Si può estrarre la sottosuccessione $x_{k_m} = y_{\bar{j}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} y_{\bar{j}}$.
- L'insieme dei valori della successione è infinito, ma, essendo A limitato, è anch'esso limitato. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass (Thm. 2.4, Cap. 1), $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ possiede almeno un punto di accumulazione $a \in X$. Di conseguenza, è possibile definire $\forall m \in \mathbb{N} \ x_{k_m} \neq a \in B_{1/m}(a) \cap A$. Per quanto detto, a è aderente ad A , il quale essendo compatto è anche chiuso, ovvero contiene i suoi punti di aderenza. Questo dimostra che $a \in A$.

Viceversa, $\forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $x_k \in A$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente a $x \in A$. Se A non fosse limitato, $\forall k \in \mathbb{N}$ si potrebbe costruire una successione x_{m_k} tale che $\|x_{m_k}\| \geq k$, che è chiaramente illimitata. Questo è assurdo, perché non sarebbe possibile estrarvi una sottosuccessione convergente. Sia $x \in \overline{A}$. Per il punto 1 del teorema $\exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $x_k \in A$ tale che $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{d} x$. Qualunque sottosuccessione di x_k converge allo stesso limite, quindi $x \in A$. Di conseguenza, A è chiuso perché $A = \overline{A}$. $\square$

Teorema 1.5 (di Weierstrass) *Siano $(\mathbb{R}^n, d), (\mathbb{R}^m, d)$ spazi metrici euclidei, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Allora $f(K) \subseteq \mathbb{R}^m$ è un insieme compatto e, se $m = 1$, $\exists \min_K f, \max_K f$.* $\square$

Teorema 1.6 (di Bolzano) *Siano $(\mathbb{R}^n, d), (\mathbb{R}^m, d)$ spazi metrici euclidei, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme connesso, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Allora $f(A)$ è connesso e, se $m = 1$, $f(A)$ è un intervallo.* $\square$

Definizione 1.6 (Insieme connesso per archi) *Sia $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme connesso per archi se $\forall x, y \in A \ \exists r : [0, 1] \rightarrow A$ continua tale che $r(0) = x, r(1) = y$.*

Teorema 1.7 *Sia $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo.*

1. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso per archi, allora è connesso
2. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, allora A è connesso $\iff A$ è connesso per archi $\square$

2 Spazi metrici completi

Definizione 2.1 (Successione di Cauchy) *Sia (X, d) uno spazio metrico. $x_n \in X \ \forall n \in \mathbb{N}, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_m, x_p) < \varepsilon \ \forall m, p \geq \bar{n}$.*

Teorema 2.1 *Se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge in (X, d) , allora è di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia x_0 il limite della successione x_n . Per la definizione di successione convergente, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$ tale che $\forall n > \bar{n} \ d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Inoltre, per le proprietà della distanza (Def. 1.1, Cap. 1) $d(x_m, x_p) \leq d(x_m, x_0) + d(x_0, x_p) < 2\varepsilon \ \forall m, p \geq \bar{n}$. $\square$

Definizione 2.2 (Spazio metrico completo) *(X, d) è uno spazio metrico completo se ogni successione di Cauchy in X ha limite in X rispetto a d .*

Teorema 2.2 (Principio di Cantor) *Sia (X, d) uno spazio metrico. (X, d) è completo se e solo se per ogni successione di insiemi chiusi non vuoti tali che $F_k \in X, F_{k+1} \subseteq F_k$ si ha che $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$.*

Definizione 2.3 (Insieme denso) *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. $Z \subseteq X$ è denso in X se $\overline{Z} = X$.*

Teorema 2.3 (del colapasta) *Ogni spazio metrico (Y, d) è completabile in modo univoco a meno di isometria. Cioè esiste X tale che $\overline{Y} = X$. Cioè esiste $Z \subseteq X$ denso in X e isometrico a Y . $\square$*

3 Proprietà delle funzioni continue

Teorema 3.1 (Continuità della somma e del prodotto per scalare) $\mathcal{F} = \{f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p\}$ è uno spazio vettoriale, poiché

$$a. (f + g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathbb{R}^p$$

$$b. (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \in \mathbb{R}^p \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Inoltre se f, g sono continue, allora $f + g, \lambda f$ sono continue. $\square$

Teorema 3.2 (Continuità della composta) *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^p, f : A \rightarrow B$ continua e $g : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua, allora $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ è continua in A .* $\square$

Teorema 3.3 (di permanenza del segno) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $\mathbf{x}_0 \in A$. Se $f(\mathbf{x}_0) > 0$, allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che $f(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.* $\square$

Capitolo 3

Calcolo differenziale per funzioni in più variabili

1 Funzioni differenziabili

Definizione 1.1 (Derivata parziale) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto. Si definisce derivata parziale j -esima di f in $\mathbf{x}_0$ il valore del seguente limite, se esiste finito:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\hat{\mathbf{e}}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

dove $\hat{\mathbf{e}}_j$ è il j -esimo vettore della base canonica.

Definizione 1.2 (Gradiente) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $\mathbf{x}_0 \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se esistono $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)$, allora si definisce gradiente di f in $\mathbf{x}_0$ il vettore $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right)$.

Definizione 1.3 (Derivata direzionale) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $\mathbf{x}_0 \in A$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $\hat{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|\hat{\nu}\| = 1$. Si definisce derivata direzionale di f in $\mathbf{x}_0$ rispetto alla direzione $\hat{\nu}$ il valore del seguente limite, se esiste finito:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\hat{\nu}) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Osservazione La derivabilità in tutte le direzioni non assicura la continuità della funzione f nel punto $\mathbf{x}_0$. Essa implica infatti solo che f sia continua in $\mathbf{x}_0$ per ogni restrizione a rette passanti in $\mathbf{x}_0$, ma non in tutto un intorno di $\mathbf{x}_0$. È necessario un concetto più forte che viene definito di seguito.

Definizione 1.4 (Funzione differenziabile) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $\mathbf{x}_0 \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ se esiste $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \mathbf{m}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$ con $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$.

Definizione 1.5 (Operatore differenziale) Si definisce operatore differenziale e si indica con $df_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'operatore $df_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{m}, \mathbf{h} \rangle$.

Teorema 1.1 (Proprietà delle funzioni differenziabili) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $\mathbf{x}_0 \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora:

1. f è continua in $\mathbf{x}_0$
2. f è derivabile parzialmente in $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{m} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$
3. f è derivabile in qualunque direzione $\hat{\nu}$ tale che $\|\hat{\nu}\| = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}} = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \hat{\nu} \rangle$

Dimostrazione. Si dimostra ciascun punto separatamente.

1. Si verifica che la distanza fra $f(\mathbf{x})$ e $f(\mathbf{x}_0)$ tende a 0 se $\mathbf{x}$ tende a $\mathbf{x}_0$.

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| &= |\langle \mathbf{m}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)| \leq \\ &\leq |\langle \mathbf{m}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle| + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \leq \\ &\leq \|\mathbf{m}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} 0 \end{aligned}$$

2. Si studia il limite che definisce la derivata parziale j -esima di f in $\mathbf{x}_0$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\hat{\mathbf{e}}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \mathbf{m}, t\hat{\mathbf{e}}_j \rangle + o(|t|)}{t} = \\ &= \langle \mathbf{m}, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle = m_j\end{aligned}$$

La derivata parziale di f rispetto a x_j è la j -esima componente del vettore $\mathbf{m}$, quindi $\mathbf{m} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$.

3. Come nel punto 2, si studia il limite che definisce la derivata direzionale di f in $\mathbf{x}_0$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\hat{\mathbf{v}}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), t\hat{\mathbf{v}} \rangle + o(|t|)}{t} = \\ &= \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \hat{\mathbf{v}} \rangle\end{aligned}$$

□

Osservazione Si noti che dal punto 3 del teorema 1.1 si evince che la direzione di massima variazione della funzione nel punto $\mathbf{x}_0$ è esattamente la direzione del gradiente di f in $\mathbf{x}_0$.

Definizione 1.6 (Insieme di livello) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Si definisce insieme di livello l'insieme $M_c = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = c\} \subseteq A$.

Teorema 1.2 (del differenziale totale) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in A . Se $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ sono continue in $\mathbf{x}_0 \forall j \in [n]$, allora f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.

Dimostrazione per $n=2$. Per la dimostrazione, si scrive $f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) + f(x, y_0) - f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$. Applicando il teorema del valor medio di Lagrange al primo e al terzo termine, si ottiene che

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, c)[y - y_0] = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1) \right] (y - y_0) \text{ con } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \quad (3.1)$$

Applicando lo stesso ragionamento al secondo e al quarto termine, si ottiene che:

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(d, y_0)[x - x_0] = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1) \right] (x - x_0) \text{ con } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \quad (3.2)$$

Unendo le equazioni (3.1) e (3.2), si può scrivere il seguente limite:

$$\begin{aligned}& \lim_{\|(x-x_0, y-y_0)\| \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = \\ &= \lim_{\|(x-x_0, y-y_0)\| \rightarrow 0} o(1) \frac{x - x_0 + y - y_0}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0\end{aligned}$$

Che è esattamente la definizione di differenziabilità, da cui la tesi. Si noti che la frazione nell'ultimo passaggio è limitata per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. □

Teorema 1.3 (Funzioni a gradiente nullo) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in A e $\nabla f(\mathbf{x}) = (0, \dots, 0) \forall \mathbf{x} \in A$, allora f è costante.

Dimostrazione. f ha le derivate parziali continue in tutto A , quindi è differenziabile per il teorema 1.2. Ai fini di questo passaggio, si consideri $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Sia (x, y) un punto qualsiasi nella palla di raggio $\varepsilon > 0$ centrata in (x_0, y_0) . Applicando il teorema del valor medio di Lagrange, si ottiene che

$$\begin{aligned}f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x, y) + f(x, y_0) - f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0)[x - x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(x, d)[y - y_0] = 0\end{aligned}$$

Quindi $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\forall \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cap A$ $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

A è un insieme aperto, quindi essendo connesso è anche connesso per archi. Questo significa che, per qualsiasi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ è possibile costruire un'applicazione $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow A$ continua tale che $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{r}(1) = \mathbf{y}$. Sia $\bar{t} = \sup\{t \in [a, b] : f(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{x})\}$. Per assurdo, si supponga che sia $\bar{t} < 1$. Questo è in diretta contraddizione con quanto detto in precedenza, perché vorrebbe dire che non è possibile trovare una palla centrata in $\mathbf{r}(\bar{t})$ in cui la funzione è costante. Quindi $\bar{t} = 1$ e la funzione è costante. □

2 Derivate di ordine superiore

Definizione 2.1 (Derivata di ordine k) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $\mathbf{x}_0 \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\exists \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}} : B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$, si definisce derivata k -esima di f in $\mathbf{x}_0$ rispetto a $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ il valore del seguente limite se esiste finito:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}}(\mathbf{x}_0 + h \hat{\mathbf{e}}_{i_k}) - \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}}(\mathbf{x}_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Definizione 2.2 (Insieme $\mathcal{C}^{(k)}(A, \mathbb{R})$) Si definisce l'insieme delle funzioni derivabili con continuità k volte in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto:

$$\mathcal{C}^{(k)}(A, \mathbb{R}) = \left\{ f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \text{ continue in } A \right\}$$

Osservazione Si noti che per il teorema 1.2 è sufficiente che siano continue le derivate k -esime, perché le altre lo sono di conseguenza. Devono comunque essere continue tutte le combinazioni possibili di derivate, che crescono molto velocemente (n^k combinazioni per le derivate di ordine k).

Teorema 2.1 (di Schwarz) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in A . Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sono continue in $\mathbf{x}_0 \in A$, allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0)$$

Dimostrazione per $n=2$. Sia $F(x) = f(x, y) - f(x, y_0)$. Applicando due volte il teorema del valor medio di Lagrange si ottiene che

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= F'(c)[x - x_0] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0) \right) [x - x_0] = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c, d)[x - x_0][y - y_0] \end{aligned}$$

Inoltre,

$$F(x) - F(x_0) = f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0) = G(y) - G(y_0)$$

dove $G(y) = f(x, y) - f(x_0, y)$. Applicando nuovamente Lagrange come in precedenza, si ottiene

$$\begin{aligned} G(y) - G(y_0) &= G'(\xi)[y - y_0] = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) \right) [y - y_0] = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta)[x - x_0][y - y_0] \end{aligned}$$

Essendo le derivate seconde continue, si possono mandare $(c, d) \rightarrow (x_0, y_0)$ e $(\xi, \eta) \rightarrow (x_0, y_0)$ e ottenere la tesi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

□

Definizione 2.3 (Matrice hessiana) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in A . Si definisce matrice hessiana di f in $\mathbf{x}_0$ la matrice

$$H_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \nabla \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Osservazione Per il teorema 2.1, se f è $\mathcal{C}^{(2)}$ in $\mathbf{x}_0 \in A$, allora $H_f(\mathbf{x}_0)$ è simmetrica.

Iperpiano tangente al grafico di una funzione Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia f una funzione differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$. Allora, per la definizione di funzione differenziabile (Def. 1.4), $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$ con $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$. Si può quindi definire $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, che approssima f se $\mathbf{x}$ tende a $\mathbf{x}_0$. I grafici delle due funzioni, definiti in $\mathbb{R}^{n+1}$, sono:

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \{(\mathbf{x}, y) \in A \times \mathbb{R} : y = f(\mathbf{x})\} \\ \Gamma_g &= \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle\}\end{aligned}$$

Γ_g è un iperpiano n -dimensionale tangente a Γ_f nel punto $\mathbf{x}_0$. Il concetto di approssimazione locale di una funzione può essere esteso tramite il teorema che segue.

Teorema 2.2 (Formula di Taylor di ordine k) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Se $f \in \mathcal{C}^{(k)}(A, \mathbb{R})$, allora vale la seguente

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j + \cdots + \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}_0) h_{i_1} \cdots h_{i_k} + \\ &+ o(\|\mathbf{h}\|^k) \text{ con } \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0\end{aligned}$$

□

Osservazione In particolare, per $n = 2$ vale

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{h}, H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{h} \rangle + o(\|\mathbf{h}\|^2) \text{ con } \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$$

3 Punti critici liberi

Definizione 3.1 (Massimo (minimo) locale) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Il punto $\mathbf{x}_0$ è un punto di massimo (minimo) locale per f se $\exists \delta > 0$ tale che $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ ($f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$) $\forall \mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0)$.

Definizione 3.2 (Punto di sella) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Il punto $\mathbf{x}_0$ è un punto di sella per f se $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ tale che $f(\mathbf{x}_1) > f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x}_2)$.

Osservazione Si noti che nelle definizioni 3.1 e 3.2 non si richiede alcuna regolarità di f e alcuna proprietà particolare di A .

Definizione 3.3 (Punto critico (o stazionario)) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. $\mathbf{x}_0 \in A$ è un punto critico (o stazionario) di f se $\exists \nabla f(\mathbf{x}_0)$ e $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Teorema 3.1 (di Fermat) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\mathbf{x}_0 \in A$ è massimo o minimo locale per f ed esiste il gradiente di f in $\mathbf{x}_0$, allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{x}_0$ è punto critico di f .

Dimostrazione. Sia $F_j(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\hat{\mathbf{e}}_j) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, dove $\hat{\mathbf{e}}_j$ è il j -esimo vettore della base canonica. Per costruzione $t = 0$ è un punto di massimo o minimo locale per F_j , di conseguenza per il teorema di Fermat in una dimensione

$$\frac{dF_j}{dt}(0) = 0$$

Inoltre, si ha che

$$\frac{dF_j}{dt}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_j(h) - F_j(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\hat{\mathbf{e}}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$$

Dove nell'ultima uguaglianza si è usato il fatto che per ipotesi esistono tutte le derivate parziali di f . In conclusione, ogni componente del gradiente è nulla quindi si ha la tesi. □

3.1 Forme quadratiche

Sia $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata di ordine n . La seguente espressione si chiama forma quadratica associata alla matrice M :

$$q_M(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{h}, M\mathbf{h} \rangle \in \mathbb{R}$$

La forma quadratica può essere:

- Definita positiva se $\forall \mathbf{h} \neq \mathbf{0}, q_M(\mathbf{h}) > 0$
- Definita negativa se $\forall \mathbf{h} \neq \mathbf{0}, q_M(\mathbf{h}) < 0$
- Semidefinita positiva se $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, q_M(\mathbf{h}) \geq 0$ e $\exists \mathbf{k}$ tale che $q_M(\mathbf{k}) = 0$
- Semidefinita negativa se $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, q_M(\mathbf{h}) \leq 0$ e $\exists \mathbf{k}$ tale che $q_M(\mathbf{k}) = 0$
- Indefinita se $\exists \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ tale che $q_M(\mathbf{h}) < 0 < q_M(\mathbf{k})$

Matrici diverse possono essere associate alla stessa forma quadratica, infatti è sufficiente che abbiano gli stessi elementi sulla diagonale e che la somma $a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji} \forall i, j \in [n]$. Fra tutte le matrici associate alla stessa forma quadratica, ci si può restringere alle matrici simmetriche (che sono sempre diagonalizzabili!), per cui esistono criteri di classificazione efficaci.

Teorema 3.2 (Classificazione delle forme quadratiche e segno degli autovalori) *Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tale che $A = A^T$ e q_A la forma quadratica associata ad A . Sia la coppia (p, q) la segnatura della matrice A , dove p rappresenta la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori positivi e q la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori negativi. Allora:*

1. q_A è definita positiva $\iff (p, q) = (n, 0)$
2. q_A è definita negativa $\iff (p, q) = (0, n)$
3. q_A è semidefinita positiva $\iff (p, q) = (m, 0)$ con $0 < m < n$
4. q_A è semidefinita negativa $\iff (p, q) = (0, l)$ con $0 < l < n$
5. q_A è indefinita $\iff (p, q) = (m, l)$ con $0 < m < n, 0 < l < n$ □

Teorema 3.3 (Criterio di Sylvester) *Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tale che $A = A^T \neq \mathbf{0}$ e sia A_k il minore principale nord-ovest di ordine k ottenuto selezionando le prime k righe e le prime k colonne di A . Allora la matrice A è:*

1. Definita positiva $\iff \det A_k > 0 \forall k \in [n]$
2. Definita negativa $\iff \det A_k < 0$ se k è dispari e $\det A_k > 0$ se k è pari $\forall k \in [n]$
3. Semidefinita positiva $\iff \det A_k \geq 0 \forall k \in [n]$ e $\exists j \in [n]$ tale che $\det A_j = 0$
4. Semidefinita negativa $\iff \det A_k \leq 0$ se k è dispari e $\det A_k \geq 0$ se k è pari $\forall k \in [n]$ e $\exists j \in [n]$ tale che $\det A_j = 0$
5. Indefinita altrimenti □

3.2 Classificazione dei punti critici

Teorema 3.4 (Classificazione con la matrice hessiana) *Sia $f \in \mathcal{C}^{(2)}(A, \mathbb{R})$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora:*

1. Se $\mathbf{x}_0 \in A$ è punto di minimo locale per f , allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ e $H_f(\mathbf{x}_0)$ è o definita positiva o semidefinita positiva
2. Se $\mathbf{x}_0 \in A$ è punto di massimo locale per f , allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ e $H_f(\mathbf{x}_0)$ è o definita negativa o semidefinita negativa
3. Se $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ e $H_f(\mathbf{x}_0)$ è definita positiva, allora $\mathbf{x}_0$ è punto di minimo locale per f
4. Se $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ e $H_f(\mathbf{x}_0)$ è definita negativa, allora $\mathbf{x}_0$ è punto di massimo locale per f
5. Se $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ e $H_f(\mathbf{x}_0)$ è indefinita, allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di sella per f

Dimostrazione. Si dimostrano i punti 1 e 3. I punti 2 e 4 hanno la dimostrazione identica, il punto 5 non è stato affrontato.

1. $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo locale per f e il suo gradiente esiste perché $f \in \mathcal{C}^{(2)}$, allora per il teorema 3.1 $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Sia $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue:

$$F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\hat{\nu}) \text{ con } \hat{\nu} \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } \|\hat{\nu}\| = 1$$

Allora per costruzione $t = 0$ è un punto di minimo locale per F . Per questo motivo,

$$\begin{aligned} 0 \leq F''(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(\mathbf{x}_0 + h\hat{\nu}) - \frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(\mathbf{x}_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{[\partial_i f(\mathbf{x}_0 + h\hat{\nu}) - \partial_i f(\mathbf{x}_0)]\nu_i}{h} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \hat{\nu}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\nu_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\nu_i \nu_j = \langle \hat{\nu}, H_f(\mathbf{x}_0)\hat{\nu} \rangle \end{aligned}$$

Questo significa che $H_f(\mathbf{x}_0)$ è definita positiva o semidefinita positiva.

3. Si applichi la formula di Taylor alla funzione f nel punto $\mathbf{x}_0$. Allora, essendo $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{h}, H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \rangle + o(\|\mathbf{h}\|^2) \text{ con } \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$$

Sia $\bar{\lambda} > 0$ il minimo degli autovalori di $H_f(\mathbf{x}_0)$, allora vale la seguente maggiorazione:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{h}, H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \rangle &\geq \bar{\lambda}\|\mathbf{h}\|^2 \\ \implies f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &\geq \|\mathbf{h}\|^2 \left(\frac{1}{2}\bar{\lambda} + o(1) \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Per cui $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo locale per f .

□

Capitolo 4

Calcolo differenziale per funzioni a valori vettoriali

1 Funzioni derivabili e differenziabili

Definizione 1.1 (Funzione derivabile) Sia $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k) : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ con A aperto. $\mathbf{f}$ è derivabile in $\mathbf{x}_0 \in A$ se $\exists \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \forall i \in [n]$. In questo caso si definisce la matrice jacobiana di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$ come segue:

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_k(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R})$$

Definizione 1.2 (Funzione differenziabile) Sia $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k) : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ con A aperto. $\mathbf{f}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$ se $\exists M \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + M\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|) \in \mathbb{R}^k \text{ con } \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$$

Teorema 1.1 (Condizioni per differenziabilità) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k) : A \rightarrow \mathbb{R}^k$.

1. $\mathbf{f}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A \iff f_1, \dots, f_k$ sono differenziabili in $\mathbf{x}_0 \in A$. In tal caso

$$M = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_k(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R})$$

2. Se $\mathbf{f}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$, allora $\mathbf{f}$ è continua in $\mathbf{x}_0$

3. Se $\mathbf{f}$ è derivabile in $\mathbf{x}_0 \in A$ e le derivate parziali sono tutte continue in $\mathbf{x}_0$, allora $\mathbf{f}$ è differenziabile □

Teorema 1.2 (di differenziabilità della funzione composta) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^k$ aperti. Siano $\mathbf{f} : A \rightarrow B$ differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$ e $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^l$ differenziabile in $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, allora $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^l$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ e $J_{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{M}_{l \times n}$. □

Definizione 1.3 (Diffeomorfismo) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti. La funzione $\mathbf{f} : A \rightarrow B$ è un diffeomorfismo $\mathcal{C}^{(k)}$ se $\mathbf{f}$ è iniettiva e suriettiva e $\mathbf{f}, \mathbf{f}^{-1}$ sono $\mathcal{C}^{(k)}$ nei rispettivi domini.

Teorema 1.3 (Differenziale della funzione inversa) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti e sia $\mathbf{f} : A \rightarrow B$ un diffeomorfismo $\mathcal{C}^{(1)}$. Allora vale che

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})))^{-1} \quad \forall \mathbf{y} \in B$$

Dimostrazione. $\mathbf{f}$ è invertibile perché è un diffeomorfismo. Di conseguenza,

$$\mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \implies J_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})) \cdot J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = \text{id}_{n \times n} \implies J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})))^{-1}$$

□

2 Varietà regolari

Definizione 2.1 (Varietà regolare $(n-k)$ -dimensionale) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k) : A \rightarrow \mathbb{R}^k \in \mathcal{C}^{(1)}$. Detto $\Gamma = \{\mathbf{x} \in A : g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_k(\mathbf{x}) = 0\}$ l'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni, Γ è una varietà regolare $(n-k)$ -dimensionale se $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$ $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ ha rango uguale a k .

Definizione 2.2 (Vettore tangente) Il vettore $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ è tangente a Γ in $\mathbf{x}_0$ se $\exists \varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^{(1)}$ tale che $\varphi(0) = \mathbf{x}_0$ e $\varphi'(0) = \mathbf{h}$.

Per ricavare i vettori appartenenti allo spazio tangente si definisce $\mathbf{G} = (\mathbf{g} \circ \varphi) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^k$. Considerando che la funzione $\mathbf{g}$ non varia spostandosi sulla varietà regolare (cioè variando il parametro t della funzione φ), si ha che:

$$\mathbf{0} = \frac{d\mathbf{G}}{dt}(0) = J_{\mathbf{g}}(\varphi(0)) \cdot \varphi'(0) = \begin{bmatrix} \langle \nabla g_1(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla g_k(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle \end{bmatrix}$$

Dall'ultimo termine si deduce che $\mathbf{h}$ deve essere ortogonale a tutti i gradienti delle componenti della funzione $\mathbf{g}$.

Definizione 2.3 (Spazio tangente) Se Γ è una varietà regolare $(n-k)$ -dimensionale e $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$, si definisce lo spazio tangente come segue:

$$T_{\mathbf{x}_0}\Gamma = \{\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla g_1(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle = 0, \dots, \langle \nabla g_k(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle = 0\}$$

Osservazione Si noti che $\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_k(\mathbf{x}_0)$ costituisce un sistema di vettori linearmente indipendenti perché $\text{rank}(J_{\mathbf{g}}) = k \forall \mathbf{x} \in \Gamma$. Per questo motivo, $\dim T_{\mathbf{x}_0}\Gamma = n - k$.

Definizione 2.4 (Spazio normale) Se Γ è una varietà regolare $(n-k)$ -dimensionale e $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$, si definisce lo spazio normale come segue:

$$N_{\mathbf{x}_0}\Gamma = \left\{ \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{h} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla g_j(\mathbf{x}_0) \right\}$$

Si noti che $\dim N_{\mathbf{x}_0}\Gamma = k$.

Definizione 2.5 (Iperpiano tangente) A partire dalla nozione di spazio tangente si può definire l'iperpiano tangente nel punto $\mathbf{x}_0$, che è costituito dall'insieme dei punti $\mathbf{x}$ tali che il loro vettore distanza dal punto $\mathbf{x}_0$ appartenga allo spazio tangente a Γ :

$$I = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla g_1(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0, \dots, \langle \nabla g_k(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0\}$$

3 Teorema di Dini

Teorema 3.1 (Caso con 1 equazione in 2 incognite) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $g \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$ e $(x_0, y_0) \in A$ tale che $g(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$. Allora,

1. $\exists \delta, \varepsilon > 0$ tale che $W = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subseteq A$
2. $\exists f \in \mathcal{C}^{(1)}([x_0 - \delta, x_0 + \delta], [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon])$ tale che $g(x, y) = 0$ con $(x, y) \in W \iff y = f(x)$ con $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

In altre parole, se si restringe l'equazione $g(x, y) = 0$ al rettangolo W l'insieme delle sue soluzioni è il grafico di f . Inoltre

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{\partial_x g(x, f(x))}{\partial_y g(x, f(x))}$$

Dimostrazione per $n = 2$ e $k = 1$. La dimostrazione si articola in tre passaggi: innanzitutto si costruisce f , poi ne si verifica la continuità e infine si calcola la sua derivata.

Per ipotesi, $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$. Ai fini della dimostrazione, si supponga che $\partial_y g(x_0, y_0) > 0$. Per il teorema di permanenza del segno (Thm. 3.3, Cap. 2), esiste una scatola $W = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 -$

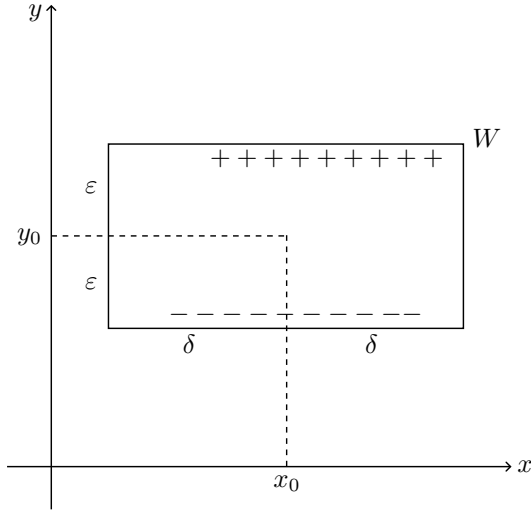


Figura 4.1: Rappresentazione della prima parte della dimostrazione. Le lunghezze δ e ε indicano la larghezza del pluri-intervallo centrato in (x_0, y_0) in cui $\partial_y g(x, y) > 0$. I segni + e - indicano gli intervalli sulle basi in cui $g(x, y) > 0$.

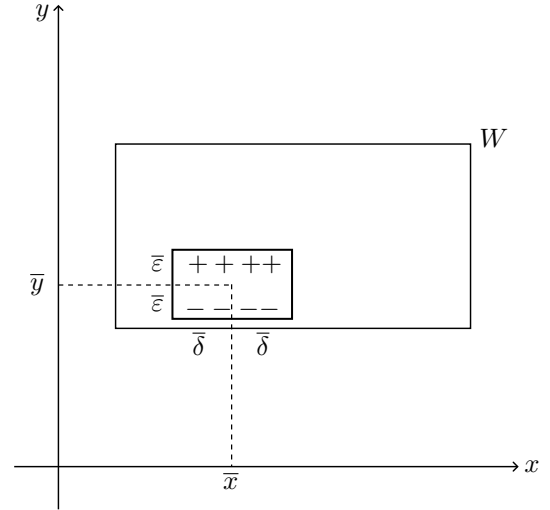


Figura 4.2: Rappresentazione della seconda parte della dimostrazione. Il ragionamento è analogo al precedente.

$\varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ con $\delta, \varepsilon > 0$ tale che $\partial_y g(x, y) > 0 \forall (x, y) \in W$ (Fig. 4.1). Sia $h(y) = g(x_0, y) \in \mathcal{C}^{(1)}$. Per quanto appena detto, $h(y)$ è una funzione strettamente crescente nell'intervallo $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, per cui $h(y_0 - \varepsilon) < 0 = h(y_0) < h(y_0 + \varepsilon)$. Si è appena dimostrato che nel punto medio delle basi del rettangolo la funzione g assume segni discordi. Applicando nuovamente il teorema di permanenza del segno, questa volta alla funzione $g(x, y)$ sulle basi del rettangolo, si ha che esiste un intervallo $[x_0 - \delta', x_0 + \delta']$ all'interno del quale $g(x, y_0 - \varepsilon) < 0 < g(x, y_0 + \varepsilon)$. Si noti che δ potrebbe non coincidere con δ' , quindi, detto $\delta = \min\{\delta, \delta'\}$, per comodità la base del rettangolo sarà ancora $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Sia ora la funzione $\tilde{h}(y) = g(\bar{x}, y) \in \mathcal{C}^{(1)}$ con $\bar{x} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ definita per $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. Per quanto detto in precedenza, $\tilde{h}(y_0 - \varepsilon) < 0 < \tilde{h}(y_0 + \varepsilon)$. Di conseguenza, per il teorema degli zeri, $\exists! \bar{y} \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ tale che $\tilde{h}(\bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. È quindi possibile definire $f : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{y} \forall \bar{x} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Sia $(\bar{x}, f(\bar{x})) \in W$ (Fig. 4.2). Per verificare la continuità di f , si fissi $\bar{\varepsilon} > 0$. Allora, per lo stesso ragionamento applicato in precedenza, $g(\bar{x}, f(\bar{x}) - \bar{\varepsilon}) < 0 = g(\bar{x}, f(\bar{x})) < g(\bar{x}, f(\bar{x}) + \bar{\varepsilon})$. Per questo motivo, $\exists \bar{\delta}$ tale che $g(x, f(\bar{x}) - \bar{\varepsilon}) < 0 < g(x, f(\bar{x}) + \bar{\varepsilon}) \forall x \in [\bar{x} - \bar{\delta}, \bar{x} + \bar{\delta}] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Questo garantisce che $f(\bar{x}) - \bar{\varepsilon} < f(x) < f(\bar{x}) + \bar{\varepsilon}$, che è esattamente la definizione di continuità (Def. 1.2, Cap. 2).

Per calcolare la derivata di f in x_1 , che è $\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, si introduce la funzione ausiliaria $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [0, 1] \rightarrow W$ definita come segue:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = \varphi_2(t) = f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1)) \end{cases}$$

Sia ora $h(t) = (g \circ \varphi)(t) \in \mathcal{C}^{(1)}([0, 1], \mathbb{R})$. Per il teorema del valor medio di Lagrange, $h(1) - h(0) = h'(c)$ con $c \in [0, 1]$.

$$h(1) - h(0) = g(\varphi(1)) - g(\varphi(0)) = g(x_2, f(x_2)) - g(x_1, f(x_1)) = 0 \quad (4.1)$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} h'(c) &= \langle \nabla g(\varphi(c)), \varphi'(c) \rangle = \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(c))[x_2 - x_1] + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(c))[f(x_2) - f(x_1)] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Siano ora $\xi = \xi(c) = x_1 + c(x_2 - x_1)$ e $\eta = \eta(c) = f(x_1) + c(f(x_2) - f(x_1))$. Unendo i risultati delle equazioni (4.1) e (4.2) e considerando che $\partial_y g(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in W$, si conclude che

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(\xi, \eta)[x_2 - x_1] + \frac{\partial g}{\partial y}(\xi, \eta)[f(x_2) - f(x_1)] &= 0 \\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= -\frac{\partial_x g(\xi, \eta)}{\partial_y g(\xi, \eta)} \end{aligned}$$

Se x_2 tende a x_1 , $f(x_2) \rightarrow f(x_1)$ e $\eta \rightarrow f(x_1)$ perché f è continua e, essendo ξ intermedio fra x_2 e x_1 , $\xi \rightarrow x_1$. In conclusione,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x_1) &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} -\frac{\partial_x g(\xi, \eta)}{\partial_y g(\xi, \eta)} = \\ &= \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow (x_1, f(x_1))} -\frac{\partial_x g(\xi, \eta)}{\partial_y g(\xi, \eta)} = \\ &= -\frac{\partial_x g(x_1, f(x_1))}{\partial_y g(x_1, f(x_1))} \end{aligned}$$

□

Osservazione Questa è alta pasticceria.

Teorema 3.2 (Caso generale con k equazioni in n incognite) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R}^k)$, $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (x_1^0, \dots, x_{n-k}^0, y_1^0, \dots, y_k^0) \in A$ tale che $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$ e

$$\det \frac{\partial(g_1 \cdots g_k)}{\partial(y_1 \cdots y_k)}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_k} \end{bmatrix}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \neq 0$$

Allora esistono $I_{\mathbf{x}^0} \in \mathbb{R}^{n-k}$ intorno circolare aperto di $\mathbf{x}^0$ e $J_{\mathbf{y}^0} \in \mathbb{R}^k$ intorno circolare aperto di $\mathbf{y}^0$ tali che:

1. $W = I_{\mathbf{x}^0} \times J_{\mathbf{y}^0} \subseteq A$
2. $\exists \mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)}(I_{\mathbf{x}^0}, J_{\mathbf{y}^0})$ tale che $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in I_{\mathbf{x}^0}$

Inoltre

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = -\frac{\det \frac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(y_1, \dots, y_{i-1}, x_j, y_{i+1}, \dots, y_k)}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))}{\det \frac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(y_1, \dots, y_k)}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))}$$

□

4 Estremanti condizionati

Definizione 4.1 (Punto estremante condizionato) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\Gamma \subseteq A$ una varietà regolare $(n-k)$ -dimensionale e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Il punto $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ è un punto di minimo (massimo) locale per f ristretta a Γ se $\exists \varepsilon > 0$ tale che $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ ($f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$) $\forall \mathbf{x} \in \Gamma \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

Definizione 4.2 (Punto critico condizionato) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\Gamma \subseteq A$ una varietà regolare $(n-k)$ -dimensionale e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Il punto $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ è punto critico condizionato per f ristretta a Γ se $\forall \hat{\mathbf{v}} \in T_{\mathbf{x}_0} \Gamma$, $\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}_0) = 0$.

Teorema 4.1 (di Fermat condizionato) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\Gamma \subseteq A$ una varietà regolare $(n-k)$ -dimensionale e $f \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$. Se $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ è punto estremante condizionato per f a Γ , allora $\mathbf{x}_0$ è un punto critico condizionato per f a Γ .

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{C}^1((-\delta, \delta), \Gamma)$ tale che $\varphi(0) = \mathbf{x}_0$ e $\varphi'(0) = \hat{\nu} \in T_{\mathbf{x}_0}\Gamma$ tale che $\|\hat{\nu}\| = 1$. Sia $F = (f \circ \varphi) : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$. Per costruzione, $t = 0$ è un punto di minimo o di massimo locale per F . Di conseguenza, per il teorema di Fermat in una dimensione,

$$\begin{aligned} 0 = F'(0) &= \frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(0) = \\ &= \langle \nabla f(\varphi(0)), \varphi'(0) \rangle = \\ &= \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \hat{\nu} \rangle = \frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Si ha così la tesi. $\square$

Corollario 4.1.1 *Sotto le ipotesi del teorema 4.1, $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in N_{\mathbf{x}_0}\Gamma$. Questo fatto ne dà un'intuitiva interpretazione geometrica.* $\square$

Definizione 4.3 (Funzione di Lagrange) Per lo studio dei punti critici condizionati di $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ alla varietà regolare Γ definita dall'equazione $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ si definisce la funzione di Lagrange, o lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(\mathbf{x}) : A \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

Teorema 4.2 (dei moltiplicatori di Lagrange) *Siano $f, g_1, \dots, g_k \in \mathcal{C}^1(A \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con A aperto in $\mathbb{R}^n$. Se $\Gamma = \{\mathbf{x} \in A : g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_k(\mathbf{x}) = 0\}$ è una varietà regolare e $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ è punto estremante condizionato di f a Γ , allora $\exists(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k)$ tale che il punto $(\mathbf{x}_0; \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k)$ è punto critico libero di $\mathcal{L}$.*

Dimostrazione. Il gradiente di $\mathcal{L}$ è

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda_1, \dots, \lambda_k) = \left(\nabla f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla g_j(\mathbf{x}), -g_1(\mathbf{x}), \dots, -g_k(\mathbf{x}) \right)$$

Se $\mathbf{x}_0$ è un punto estremante condizionato per f a Γ , allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in N_{\mathbf{x}_0}\Gamma$ per il corollario 4.1.1. Questo significa che $\exists \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k$ tale che $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j \nabla g_j(\mathbf{x}_0)$. Di conseguenza, le prime n componenti del gradiente di $\mathcal{L}$ in $\mathbf{x}_0$ sono nulle. Le ultime k componenti sono nulle in $\mathbf{x}_0$ perché $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ quindi è soluzione del sistema di equazioni $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. In conclusione, $(\mathbf{x}_0, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k)$ è un punto critico libero per $\mathcal{L}$. $\square$

Teorema 4.3 (Condizioni con funzione di Lagrange) *Siano $f, g_1, \dots, g_k \in \mathcal{C}^2(A \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con A aperto e $\Gamma = \{\mathbf{x} \in A : g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_k(\mathbf{x}) = 0\}$ una varietà regolare.*

1. Se $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ è punto di minimo (massimo) condizionato di f a Γ , allora $\exists \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k \in \mathbb{R}$ tale che

$$a. \nabla f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j \nabla g_j(\mathbf{x}_0)$$

b. $\left\langle \mathbf{h}, \left(H_f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j H_{g_j}(\mathbf{x}_0) \right) \mathbf{h} \right\rangle \geq 0$ (≤ 0) $\forall \mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}_0}\Gamma$, ovvero la restrizione della forma quadratica associata alla matrice $\left(H_f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j H_{g_j}(\mathbf{x}_0) \right)$ allo spazio $T_{\mathbf{x}_0}\Gamma$ è definita positiva o semidefinita positiva (definita negativa o semidefinita negativa)

2. Se $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ soddisfa per una qualche scelta di $(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k)$:

$$a. \nabla f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j \nabla g_j(\mathbf{x}_0)$$

$$b. \left\langle \mathbf{h}, \left(H_f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j H_{g_j}(\mathbf{x}_0) \right) \mathbf{h} \right\rangle > 0$$
 (< 0) $\forall \mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}_0}\Gamma$

allora $\mathbf{x}_0$ è punto di minimo (massimo) condizionato di f a Γ .

Dimostrazione del punto 2. La matrice hessiana della funzione langrangiana è la seguente:

$$H_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} H_f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j H_{g_j}(\mathbf{x}) & -[J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})]^T \\ -J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

Si supponga che essa sia definita positiva se ristretta allo spazio tangente a Γ in $\mathbf{x}_0$. Applicando la formula di Taylor,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= \mathcal{L}(\mathbf{x}; \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k) - \mathcal{L}(\mathbf{x}_0; \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k) = \\ &= \frac{1}{2} \langle (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{0}), H_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{0}) \rangle + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \left(H_f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j H_{g_j}(\mathbf{x}_0) \right) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right\rangle + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) \end{aligned}$$

Sia ora $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathcal{C}^{(1)}((-\delta, \delta), \Gamma)$ tale che $\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{x}_0$ e $\boldsymbol{\varphi}'(0) = \mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}_0}\Gamma$. Allora $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + \mathbf{o}(|t|)$ per $|t| \rightarrow 0$. Di conseguenza,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= \frac{t^2}{2} \left\langle \mathbf{h} + \mathbf{o}(1), \left(H_f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j H_{g_j}(\mathbf{x}_0) \right) (\mathbf{h} + \mathbf{o}(1)) \right\rangle + o(\|\mathbf{h} + \mathbf{o}(1)\|^2 t^2) = \\ &= \frac{t^2}{2} \left\langle \mathbf{h}, \left(H_f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j H_{g_j}(\mathbf{x}_0) \right) \mathbf{h} \right\rangle (1 + o(1)) \geq 0 \end{aligned}$$

Quindi $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo per f condizionato a Γ . □

Capitolo 5

Teoria della misura e dell'integrazione

1 Misura di Peano-Jordan

Definizione 1.1 (Intervallo semi-aperto superiormente) Si definisce intervallo semi-aperto superiormente di $\mathbb{R}^n$ il prodotto cartesiano di n intervalli chiusi inferiormente e aperti superiormente:

$$I = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \text{ con } a_i \leq b_i \forall i \in [n]$$

La misura elementare di I è

$$\mu_n(I) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

Definizione 1.2 (Pluri-intervallo) Siano $I_1, \dots, I_k$ intervalli semi-aperti superiormente a due a due disgiunti. Si definisce pluri-intervallo l'unione $P = \bigcup_{j=1}^k I_j$. La misura di P è $\mu_n(P) = \sum_{j=1}^k \mu_n(I_j)$. L'insieme dei pluri-intervalli di $\mathbb{R}^n$ viene indicato con $\mathbb{P}$.

Lemma 1.1 Valgono le seguenti proposizioni:

- Se $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}$, allora $\bigcup_{j=1}^k P_j, \bigcap_{j=1}^k P_j \in \mathbb{P}$
- Se $P_1, P_2 \in \mathbb{P}$, allora $P_2 \setminus P_1 \in \mathbb{P}$ □

Teorema 1.2 (Caratterizzazione della misura in $\mathbb{P}$) Per la misura in $\mathbb{P}$ valgono le seguenti proprietà:

1. (Additività finita) Se $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}$ sono a due a due disgiunti, allora

$$\mu_n \left(\bigcup_{j=1}^k P_j \right) = \sum_{j=1}^k \mu_n(P_j)$$

2. (Monotonia) Se $P, Q \in \mathbb{P}$ e $P \subseteq Q \implies \mu_n(P) \leq \mu_n(Q)$

3. (Modularità) Se $P, Q \in \mathbb{P}$, allora

$$\mu_n(P \cup Q) + \mu_n(P \cap Q) = \mu_n(P) + \mu_n(Q)$$

4. (Sottrattività) Se $P, Q \in \mathbb{P} \implies \mu_n(P \setminus Q) = \mu_n(P) - \mu_n(P \cap Q)$. In particolare, se $Q \subseteq P$, allora $\mu_n(P \setminus Q) = \mu_n(P) - \mu_n(Q)$ □

Corollario 1.2.1 Se $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}$, allora $\mu_n \left(\bigcup_{j=1}^k P_j \right) \leq \sum_{j=1}^k \mu_n(P_j)$. Ovvero, vale la proprietà di subadditività finita per μ_n su $\mathbb{P}$. □

Lemma 1.3 Se $P \in \mathbb{P}$, allora $\partial P \in \mathbb{P}$ e $\mu_n(\partial P) = 0$. $\square$

Corollario 1.3.1 Se $P \in \mathbb{P}$, allora $\mathring{P}, \overline{P}$ sono misurabili e $\mu_n(\mathring{P}) = \mu_n(\overline{P}) = \mu_n(P)$. $\square$

Definizione 1.3 (Misura interna ed esterna) Si definiscono gli insiemi dei pluri-intervalli interni all'insieme X , $\mathbb{P}^{(i)}$, e dei pluri-intervalli esterni all'insieme X , $\mathbb{P}^{(e)}$:

$$\mathbb{P}^{(i)} = \{P \in \mathbb{P} : P \subseteq X\}$$

$$\mathbb{P}^{(e)} = \{Q \in \mathbb{P} : Q \supseteq X\}$$

La misura interna di X è $\mu_n^{(i)}(X) = \sup_{P \in \mathbb{P}^{(i)}} \mu_n(P)$ e la misura esterna di X è $\mu_n^{(e)}(X) = \inf_{Q \in \mathbb{P}^{(e)}} \mu_n(Q)$

Lemma 1.4 $\mu_n^{(i)}(X), \mu_n^{(e)}(X) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $\mu_n^{(i)}(X) \leq \mu_n^{(e)}(X)$. $\square$

Definizione 1.4 (Insieme limitato misurabile secondo Peano-Jordan) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato. Si dice che X è misurabile secondo Peano-Jordan se $\mu_n^{(i)}(X) = \mu_n^{(e)}(X)$ e in tal caso si dice misura n -dimensionale di X tale valore. L'insieme degli insiemi limitati misurabili secondo Peano-Jordan si indica con $\mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 1.5 Valgono le seguenti proposizioni:

1. $\mathbb{P} \subseteq \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$. Tutti i pluri-intervalli sono misurabili secondo Peano-Jordan e la misura coincide con quella definita in modo elementare.
2. Se $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$, allora $\bigcup_{j=1}^k X_j, \bigcap_{j=1}^k X_j \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$
3. Se $X, Y \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n) \implies X \setminus Y \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$ $\square$

Teorema 1.6 (Caratterizzazione della misurabilità) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato. Allora:

1. $X \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists P, Q \in \mathbb{P}$ tale che $P \subseteq X \subseteq Q$ e $\mu_n(Q) - \mu_n(P) < \varepsilon$
2. $X \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists Y, Z \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$ tale che $Y \subseteq X \subseteq Z$ e $\mu_n(Z) - \mu_n(Y) < \varepsilon$
3. $X \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n) \iff \partial X \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_n(\partial X) = 0$ $\square$

Corollario 1.6.1 Se $X \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$, allora $\overline{X}, \mathring{X} \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_n(X) = \mu_n(\overline{X}) = \mu_n(\mathring{X})$. $\square$

Teorema 1.7 (Proprietà di $\mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$) Valgono le seguenti proprietà per la misura in $\mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$:

1. (Additività finita) Se $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$ sono a due a due disgiunti, allora

$$\mu_n \left(\bigcup_{j=1}^k X_j \right) = \sum_{j=1}^k \mu_n(X_j)$$

2. (Modularità) Se $X, Y \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$, allora $\mu_n(X \cup Y) + \mu_n(X \cap Y) = \mu_n(X) + \mu_n(Y)$
3. (Monotonia) Se $X, Y \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$ e $X \subseteq Y$, allora $\mu_n(X) \leq \mu_n(Y)$
4. (Sottrattività) Se $X, Y \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$, allora $\mu_n(X \setminus Y) = \mu_n(X) - \mu_n(X \cap Y)$. In particolare, se $Y \subseteq X \implies \mu_n(X \setminus Y) = \mu_n(X) - \mu_n(Y)$ $\square$

Teorema 1.8 (Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla)

1. $\mathring{X} = \emptyset \iff \mu_n^{(i)}(X) = 0$
2. $X \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_n(X) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathbb{P}$ tale che $P \supseteq X$ e $\mu_n(P) < \varepsilon$
3. $X \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_n(X) = 0 \iff \mathring{X} = \emptyset$ e $X \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$ $\square$

Definizione 1.5 (Insieme misurabile secondo Peano-Jordan) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$. X è misurabile secondo Peano-Jordan, ovvero $X \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, se $\forall Y \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$, $Y \cap X \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$. In tal caso si definisce $\mu_n(X) = \sup\{\mu_n(X \cap Y) : Y \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)\}$.

Osservazione Questa definizione allarga la nozione di misura agli insiemi non limitati. Un insieme misurabile in $\mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$ ha la stessa misura se misurato in $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.9 Se $X \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ e $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione crescente di elementi in $\mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$, ovvero:

1. $\forall k \in \mathbb{N}, X_k \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^n)$
2. $X_k \subseteq X_{k+1}$
3. $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = \mathbb{R}^n$,

allora $\mu_n(X) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_n(X \cap X_k)$. □

Teorema 1.10 $\mu_n : \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ e inoltre:

1. $\emptyset \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$
2. Se $X \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, allora $\mathbb{R}^n \setminus X \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$
3. Se $X, Y \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, allora $X \cup Y, X \cap Y, X \setminus Y \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ □

Teorema 1.11 (Proprietà di $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$) $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ gode delle seguenti proprietà:

1. (Additività finita) Se $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $X_i \cap X_j = \emptyset \forall i, j \in [k]$, allora $\bigcup_{j=1}^k X_j \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\mu_n \left(\bigcup_{j=1}^k X_j \right) = \sum_{j=1}^k \mu_n(X_j)$$

2. (Monotonia) Se $X, Y \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ e $X \subseteq Y$, allora $\mu_n(X) \leq \mu_n(Y)$
3. (Modularità) Se $X, Y \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\mu_n(X \cup Y) + \mu_n(X \cap Y) = \mu_n(X) + \mu_n(Y)$$

4. (Sottrattività) Se $X, Y \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_n(Y) < +\infty$, allora

$$\mu_n(X \setminus Y) = \mu_n(X) - \mu_n(X \cap Y)$$
□

Osservazione Nel punto 3. del teorema 1.11 è importante non spostare termini dell'espressione da una parte all'altra dell'uguaglianza. Essendo X e Y insiemi non necessariamente limitati, potrebbe presentarsi una forma di indecisione $\infty - \infty$.

Lemma 1.12 $X \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \iff \partial X \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_n(\partial X) = 0$. □

2 Integrazione secondo Riemann

Definizione 2.1 (Funzione non negativa integrabile secondo Riemann) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e tale che $f \geq 0$. Si definisce sottografico di f l'insieme $R(f) = \{(\mathbf{x}, y) \in A \times \mathbb{R}_{\geq 0} : 0 \leq y \leq f(\mathbf{x})\}$. f si dice integrabile secondo Riemann se $R(f) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+1})$ e in tal caso

$$\int \cdots \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \mu_{n+1}(R(f))$$

f è detta sommabile se f è integrabile e $\int \cdots \int_A f < +\infty$.

Definizione 2.2 (Parte positiva e parte negativa) Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si definiscono:

- Parte positiva di f , $f_+(\mathbf{x}) = \max\{0, f(\mathbf{x})\}$
- Parte negativa di f , $f_-(\mathbf{x}) = \max\{0, -f(\mathbf{x})\}$

In base a questa definizione, $f(\mathbf{x}) = f_+(\mathbf{x}) - f_-(\mathbf{x})$ e $|f(\mathbf{x})| = f_+(\mathbf{x}) + f_-(\mathbf{x})$.

Definizione 2.3 (Funzione integrabile secondo Riemann) Siano $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Se f_+ e f_- sono integrabili e almeno uno fra $\int \cdots \int_A f_+$, $\int \cdots \int_A f_-$ è un valore finito, allora f si dice integrabile secondo Riemann e

$$\int \cdots \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_A f_+(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n - \int \cdots \int_A f_-(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Inoltre, se f_+ e f_- sono sommabili, allora f è sommabile.

Teorema 2.1 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\left| \int \cdots \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \right| \leq \int \cdots \int_A |f(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \cdots dx_n$$

□

Teorema 2.2 (Proprietà delle funzioni sommabili) Siano $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitate e sommabili secondo Riemann. Valgono le seguenti proprietà:

1. (Linearità) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg$ è sommabile e $\int \cdots \int_A (af + bg) = a \int \cdots \int_A f + b \int \cdots \int_A g$
2. (Monotonia) Se $\forall \mathbf{x} \in A$ $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, allora $\int \cdots \int_A f \leq \int \cdots \int_A g$
3. (Additività rispetto al dominio di integrazione) Se $\mu_n(A) < +\infty$ e $A_1, A_2 \subseteq A$ tale che $A_1 \cup A_2 = A$ e $A_1, A_2 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_n(A_1 \cap A_2) = 0$, allora $\int \cdots \int_A f = \int \cdots \int_{A_1} f + \int \cdots \int_{A_2} f$ □

Teorema 2.3 (della media integrale) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\mu_n(A) < +\infty$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e sommabile. Allora:

$$\inf_A f \leq \frac{\int \cdots \int_A f}{\mu_n(A)} \leq \sup_A f$$

□

Corollario 2.3.1 Sotto le ipotesi del teorema, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto e connesso e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora $\exists \mathbf{c} \in A$ tale che $\frac{\int \cdots \int_A f}{\mu_n(A)} = f(\mathbf{c})$. □

Alcune classi di funzioni sommabili sono le seguenti, in cui $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme compatto e misurabile:

- $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua è sommabile
- $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua quasi ovunque è integrabile. Se f è limitata, allora è anche sommabile
- Siano $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{K}$ e $f : K \setminus \{\mathbf{x}_0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\forall \varepsilon > 0$ $f : K \setminus B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata e sommabile e $\exists \alpha \in (0, n)$ tale che $\lim_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^\alpha f(\mathbf{x}) = 0$, allora f è sommabile in $K \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ e $\int_{K \setminus \{\mathbf{x}_0\}} f = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{K \setminus B_{1/l}(\mathbf{x}_0)} f$

2.1 Integrali doppi

Teorema 2.4 (di riduzione sui rettangoli) Sia $K = [a, b] \times [c, d]$ e $f \in C^{(1)}(K, \mathbb{R})$, allora:

1. $G : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ è continua e $\iint_K f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) dx \right)$
2. $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ è continua e $\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)$
3. Se $f(x, y) = g(x)h(y)$, allora

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \iint_K g(x)h(y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

□

Definizione 2.4 (Dominio normale rispetto a un asse)

- a. Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^{(0)}([c, d], \mathbb{R})$ tale che $\varphi(y) \leq \psi(y) \forall y \in [c, d]$. Allora

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [c, d] : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

è un dominio normale rispetto all'asse x .

- b. Siano $g, h \in \mathcal{C}^{(0)}([a, b], \mathbb{R})$ tale che $g(x) \leq h(x) \forall x \in [a, b]$. Allora

$$B = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

è un dominio normale rispetto all'asse y .

Teorema 2.5 (di riduzione degli integrali doppi su domini normali)

- a. Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^{(0)}([c, d], \mathbb{R})$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [c, d] : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$ e $f \in \mathcal{C}^{(0)}(A, \mathbb{R})$. Allora

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right)$$

- b. Siano $g, h \in \mathcal{C}^{(0)}([a, b], \mathbb{R})$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [a, b] : g(x) \leq y \leq h(x)\}$ e $f \in \mathcal{C}^{(0)}(A, \mathbb{R})$. Allora

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right)$$

□

2.2 Integrali tripli

Definizione 2.5 (Solido di Cavalieri) Sia $K \subseteq \mathbb{R}^3$ compatto e misurabile. Se esiste un asse $\hat{\lambda}$ tale che

- a. $\forall \lambda \in [a, b]$, $\text{sez}_\lambda(K)$ è un insieme misurabile e
 b. $\forall \lambda < a$ e $\lambda > b$, $\text{sez}_\lambda(K) = \emptyset$,

allora K è detto solido di Cavalieri.

Assioma (di Cavalieri) Se V e W sono solidi di Cavalieri rispetto allo stesso asse $\hat{\lambda}$, $\mu_2(\text{sez}_\lambda(V)) \leq \mu_2(\text{sez}_\lambda(W)) \forall \lambda \in [a, b]$ e $\mu_2(\text{sez}_\lambda(V)) = \mu_2(\text{sez}_\lambda(W)) = 0 \forall \lambda \notin [a, b]$, allora $\mu_3(V) \leq \mu_3(W)$. Inoltre, se $\mu_2(\text{sez}_\lambda(V)) = \mu_2(\text{sez}_\lambda(W))$, allora $\mu_3(V) = \mu_3(W)$.

Teorema 2.6 (di Cavalieri) Sia $K \in \mathcal{J}_b(\mathbb{R}^3)$ compatto un solido di Cavalieri rispetto all'asse $\hat{z}$. Allora

$$\mu_3(K) = \int_a^b dz \mu_2(\text{sez}_z(K)) = \int_a^b dz \left(\iint_{\text{sez}_z(K)} dx dy \right)$$

Inoltre, se $f \in \mathcal{C}^{(0)}(K, \mathbb{R})$, allora

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \left(\iint_{\text{sez}_z(K)} f(x, y, z) dx dy \right)$$

□

Definizione 2.6 (Domino normale rispetto a un asse in $\mathbb{R}^3$) Siano $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto e misurabile, $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^{(0)}(K, \mathbb{R})$ tale che $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \forall (x, y) \in K$. Si dice dominio normale rispetto all'asse $\hat{z}$ l'insieme $A = \{(x, y, z) \in K \times \mathbb{R} : \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$.

Teorema 2.7 (di riduzione degli integrali tripli su domini normali) Siano φ, ψ, K, A come nella Definizione 2.6. Allora

$$\mu_3(A) = \iint_K dx dy (\psi(x, y) - \varphi(x, y))$$

Inoltre, se $f \in \mathcal{C}^{(0)}(A, \mathbb{R})$,

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_K dx dy \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} dz f(x, y, z) \right)$$

2.3 Cambiamento di variabile nell'integrale multiplo

Per comprendere il significato del cambiamento di variabile nell'integrale multiplo, è opportuno ricordare le principali caratteristiche delle applicazioni lineari.

Definizione 2.7 (Applicazione lineare) Sia $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione. Essa è detta lineare se possiede le seguenti proprietà:

1. $\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
2. $\mathbf{A}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{A}(\mathbf{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

Inoltre, detta $M_A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ la matrice associata all'applicazione $\mathbf{A}$, il valore assoluto del suo determinante rappresenta il fattore di cui viene riscalata la misura di un qualsiasi $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ attraverso l'applicazione.

$$\mu_n(\mathbf{A}(Q)) = |\det M_A| \mu_n(Q)$$

Osservazione Si noti che nel caso lineare $\det M_A \neq 0 \implies A$ biunivoca da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$.

Nel caso non lineare, quindi con un'applicazione Φ qualsiasi, non esiste un fattore di scala valido per tutto lo spazio, ma localmente è possibile approssimare la trasformazione con una trasformazione lineare. Il fattore di scala infinitesimo è rappresentato dal determinante della matrice jacobiana dell'applicazione. Inoltre non vale l'osservazione appena fatta ed è quindi necessario richiedere sia che Φ sia iniettiva sia che abbia $\det J_\Phi \neq 0$.

Teorema 2.8 (Cambiamento di variabile nell'integrale multiplo) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\Phi \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R}^n)$, Φ iniettiva e $\det J_\Phi \neq 0$ in A . Allora, se $K \subseteq A$ è compatto e misurabile, anche $\Phi(K)$ è compatto e misurabile e vale

$$\mu_n(\Phi(K)) = \int \cdots \int_K |\det J_\Phi(u_1, \dots, u_n)| du_1 \cdots du_n$$

Inoltre, se $f \in \mathcal{C}^{(0)}(\Phi(K), \mathbb{R})$, allora

$$\int \cdots \int_{\Phi(K)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_K (f \circ \Phi)(u_1, \dots, u_n) |\det J_\Phi(u_1, \dots, u_n)| du_1 \cdots du_n$$

□

Osservazione Il teorema del cambiamento di variabile continua a valere nel caso di perdita di iniettività o di $\det J_\Phi = 0$ su insiemi di misura nulla che sono trasformati in insiemi di misura nulla.

Coordinate polari nel piano La trasformazione in coordinate polari nel piano $\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definita come segue:

$$\Phi(\rho, \theta) = \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Il determinante della matrice jacobiana di $\Phi(\rho, \theta)$ è ρ . Di conseguenza, $\det J_\Phi = 0$ solo sul segmento $\{0\} \times [0, 2\pi]$, che ha misura nulla nello spazio (ρ, θ) e che viene trasformato nel punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, che ha misura nulla in $\mathbb{R}^2$. Inoltre $\Phi(\rho, \theta)$ non è iniettiva sul segmento $\{0\} \times [0, 2\pi]$ e sull'insieme $[0, +\infty) \times \{0, 2\pi\}$, che hanno entrambi misura nulla nello spazio (ρ, θ) . Il primo viene trasformato nel punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ e il secondo nel semiasse x positivo, ovvero $[0, +\infty) \times \{0\} \in \mathbb{R}^2$. Entrambi hanno misura nulla in $\mathbb{R}^2$.

Per quanto detto, Φ è un cambiamento di variabile ammissibile per il teorema 2.8. Sia $f \in \mathcal{C}^{(0)}(\Phi(K), \mathbb{R})$ con $K \subseteq [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$ compatto e misurabile, allora si ha

$$\iint_{\Phi(K)} f(x, y) dx dy = \iint_K (f \circ \Phi)(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$ La trasformazione in coordinate sferiche nello spazio $\Phi : [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è definita come segue:

$$\Phi(\rho, \theta, \varphi) = \begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

Il determinante della matrice jacobiana di $\Phi(\rho, \theta, \varphi)$ è $\rho^2 \sin \theta$. Il determinante si annulla quindi nel rettangolo $Z = \{0\} \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ e sull'insieme $[0, +\infty) \times \{0\} \times [0, 2\pi]$, che hanno misura nulla e sono trasformati in insiemi di misura nulla. Inoltre $\Phi(\rho, \theta, \varphi)$ non è iniettiva sul rettangolo Z , sull'insieme $[0, +\infty) \times [0, \pi] \times \{0, 2\pi\}$ e sull'insieme $[0, +\infty) \times \{0, \pi\} \times [0, 2\pi]$, tuttavia hanno tutti misura nulla nello spazio (ρ, θ, φ) e sono trasformati in insiemi di misura nulla in $\mathbb{R}^3$.

Φ è un cambiamento di variabile ammissibile per il teorema 2.8. Sia $f \in \mathcal{C}^{(0)}(\Phi(K), \mathbb{R})$ con $K \subseteq [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ compatto e misurabile, allora si ha

$$\iiint_{\Phi(K)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_K (f \circ \Phi)(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$$

Si noti che, geometricamente, il punto nello spazio è individuato dall'intersezione di una sfera, un semicono e un semipiano.

Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$ La trasformazione in coordinate cilindriche nello spazio $\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è definita come segue:

$$\Phi(\rho, \varphi, h) = \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = h \end{cases}$$

Il determinante della matrice jacobiana di $\Phi(\rho, \varphi, h)$ è ρ , che si annulla sull'insieme $Z = \{0\} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$. Inoltre $\Phi(\rho, \varphi, h)$ non è iniettiva sull'insieme Z e sull'insieme $[0, +\infty) \times \{0, 2\pi\} \times \mathbb{R}$, tuttavia entrambi hanno misura nulla nello spazio (ρ, φ, h) e sono trasformati in insiemi di misura nulla in $\mathbb{R}^3$, rispettivamente l'asse z e il semipiano positivo del piano xz .

Φ è un cambiamento di variabile ammissibile per il teorema 2.8. Sia $f \in \mathcal{C}^{(0)}(\Phi(K), \mathbb{R})$ con $K \subseteq [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, allora si ha

$$\iiint_{\Phi(K)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_K (f \circ \Phi)(\rho, \varphi, h) \rho d\rho d\varphi dh$$

Si noti che, geometricamente, il punto nello spazio è individuato dall'intersezione di un cilindro, un semipiano e un piano.

Capitolo 6

Curve e lavoro

1 Curve in forma parametrica

Definizione 1.1 (Curva) Si definisce curva in $\mathbb{R}^n$ una funzione $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. $\mathbf{r}([a, b])$ è detto sostegno della curva.

Osservazione La richiesta della continuità non è sufficiente perché $\mathbf{r}([a, b])$ sia un sottoinsieme di dimensione 1 di $\mathbb{R}^n$. Esempio: la curva di Peano.

Definizione 1.2 (Parametrizzazione regolare) Si dice parametrizzazione regolare della curva una funzione $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^{(1)}$ tale che $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t \in [a, b]$.

Definizione 1.3 (Parametrizzazione semplice aperta) Si dice parametrizzazione semplice aperta una funzione $\mathbf{r} : [a, b] \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \mathbf{r}([a, b])$. Si noti che $\mathbf{r}$ è un omeomorfismo.

Definizione 1.4 (Parametrizzazione semplice chiusa) Si dice parametrizzazione semplice chiusa una funzione $\mathbf{r} : (a, b) \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \mathbf{r}((a, b))$ e $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.

Teorema 1.1 (Invarianza per cambio di parametrizzazione) Siano $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b], \gamma)$ e $\varphi : [\alpha, \beta] \xrightarrow[\text{su}]{1-1} [a, b] \in \mathcal{C}^{(1)}$ con $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}^{(1)}$ (ovvero, φ è un diffeomorfismo). Sia $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} \circ \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Allora

1. $\boldsymbol{\rho}([\alpha, \beta]) = \gamma$, ovvero il sostegno della curva è invariato
2. $\boldsymbol{\rho}$ è regolare se e solo se $\mathbf{r}$ è regolare
3. $\boldsymbol{\rho}$ è semplice (aperta o chiusa) se e solo se $\mathbf{r}$ è semplice (aperta o chiusa) □

Osservazione Quando si trattano curve in forma parametrica si considera la classe di equivalenza delle parametrizzazioni con lo stesso sostegno definita come segue: $\mathbf{r} \sim \boldsymbol{\rho} \iff \exists \varphi \in \mathcal{C}^{(1)}([\alpha, \beta], [a, b])$ diffeomorfismo tale che $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} \circ \varphi$.

Definizione 1.5 (Curva orientabile) $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso e compatto è orientabile se $\exists \mathbf{T} : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua tale che $\forall \mathbf{x} \in \gamma$ $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\gamma$ e $\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| = 1$. In altre parole, è necessario che esista un campo continuo di versori tangenti alla curva. Sia $\mathbf{r}$ una parametrizzazione regolare semplice. Si definisce orientamento indotto da $\mathbf{r}$ il campo di versori

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{r}'(r^{-1}(\mathbf{x}))}{\|\mathbf{r}'(r^{-1}(\mathbf{x}))\|} \in T_{\mathbf{x}}\gamma$$

Lemma 1.2 Ogni curva semplice e regolare è orientabile. La semplicità garantisce che γ abbia esattamente due orientamenti. □

Teorema 1.3 (Effetto del cambio di parametrizzazione sull'orientamento) Sia γ orientabile e sia $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ come nella Definizione 1.5. Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ un diffeomorfismo $\mathcal{C}^{(1)}$ e sia $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} \circ \varphi$ una nuova parametrizzazione di γ . Vi sono due casi:

- a. φ è un diffeomorfismo crescente, allora l'orientamento indotto da $\boldsymbol{\rho}$ è lo stesso di $\mathbf{r}$

b. φ è un diffeomorfismo decrescente, allora l'orientamento indotto da ρ è opposto a quello indotto da $\mathbf{r}$

Dimostrazione. Si nota immediatamente che il segno dell'orientamento dipende esclusivamente dal segno della derivata di φ .

$$\rho'(\tau) = \mathbf{r}'(\varphi(\tau)) \frac{d\varphi}{d\tau}(\tau)$$

□

Definizione 1.6 (Parametrizzazione regolare a tratti) Si definisce parametrizzazione regolare a tratti $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua se $\exists a = t_1 < \dots < t_k = b$ tale che $\mathbf{r} : [t_i, t_{i+1}] \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \mathbf{r}([t_i, t_{i+1}]) \in \mathcal{C}^{(1)}$ e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t \in (t_i, t_{i+1}) \forall i \in [k-1]$.

Definizione 1.7 (Parametrizzazione regolare a tratti orientabile) Si definisce parametrizzazione regolare a tratti orientabile $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua se $\exists a = t_1 < \dots < t_k = b$ tale che $\mathbf{r} : [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_k\} \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \gamma$, $\mathbf{r} : [t_i, t_{i+1}] \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \mathbf{r}([t_i, t_{i+1}]) \in \mathcal{C}^{(1)}$ e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t \in (t_i, t_{i+1}) \forall i \in [k-1]$.

Definizione 1.8 (Punto di arresto) Sia $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^{(1)}$. $t \in [a, b]$ è punto di arresto se $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$.

2 Integrali curvilinei

Definizione 2.1 (Lunghezza di una curva) Siano γ una curva e sia $\mathcal{D}_P = \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k \in \gamma$ una suddivisione di γ . Si definisce lunghezza della curva γ $L_\gamma = \sup_P \sum_{j=1}^k \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}\|$.

Teorema 2.1 (Lunghezza di una curva regolare) Se γ è una curva regolare, allora la lunghezza di γ è

$$L_\gamma = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

dove $\mathbf{r} : [a, b] \xrightarrow{\text{su}} \gamma$ è una parametrizzazione regolare.

Dimostrazione. Si dimostra solo la disuguaglianza $L_P \leq \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt \forall P$. Siano $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ i valori nell'intervallo $[a, b]$ corrispondenti ai punti della suddivisione $\mathcal{D}_P$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1} &= \mathbf{r}(t_j) - \mathbf{r}(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{r}'(t) dt \\ \Rightarrow L_P &= \sum_{j=1}^k \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}\| = \sum_{j=1}^k \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{r}'(t) dt \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt \end{aligned}$$

□

Proposizione 2.2 La lunghezza di una curva regolare non dipende dalla parametrizzazione.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b], \mathbb{R}^n)$ una parametrizzazione regolare di γ , $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ un diffeomorfismo $\mathcal{C}^{(1)}$ e $\rho = \mathbf{r} \circ \varphi$.

$$\int_\alpha^\beta \left\| \frac{d\rho}{d\tau}(\tau) \right\| d\tau = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d\varphi}{d\tau}(\tau) \right\| \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(\varphi(\tau)) \right\| d\tau \quad (6.1)$$

Si presentano due casi:

a. Se φ è un diffeomorfismo crescente, la (6.1) diventa come segue:

$$\int_\alpha^\beta \frac{d\varphi}{d\tau}(\tau) \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(\varphi(\tau)) \right\| d\tau = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt = L_\gamma$$

- b. Se φ è un diffeomorfismo crescente, il valore assoluto cambia il segno della sua derivata e la (6.1) diventa come segue:

$$\int_{\alpha}^{\beta} -\frac{d\varphi}{d\tau}(\tau) \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(\varphi(\tau)) \right\| d\tau = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt = L_{\gamma}$$

Dove in entrambi i casi è stato usato il teorema del cambiamento di variabile nell'integrale. $\square$

Proposizione 2.3 *Tutte le curve regolari a tratti sono rettificabili, ovvero hanno lunghezza finita.* $\square$

Definizione 2.2 (Integrale di linea di una funzione) Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua con A aperto, $\gamma \subseteq A$ una curva regolare (o regolare a tratti) e $\mathbf{r} : [a, b] \xrightarrow{\text{su}} \gamma \in \mathcal{C}^{(1)}$ una sua parametrizzazione, allora

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

Definizione 2.3 (Ascissa curvilinea) Sia γ una curva rettificabile e $\mathbf{r} : [a, b] \xrightarrow{\text{su}} \gamma \in \mathcal{C}^{(1)}$ una sua parametrizzazione regolare. Sia

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du$$

$s(t)$ è detta ascissa curvilinea.

$s \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b], [0, L_{\gamma}])$ è iniettiva e suriettiva. Inoltre $s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| \neq 0 \forall t \in [a, b]$. Per questo s è invertibile con inversa a sua volta $\mathcal{C}^{(1)}$. s^{-1} è quindi un cambiamento di variabile ammissibile e solitamente negli integrali si sottintende di star utilizzando l'ascissa curvilinea.

3 Lavoro

Definizione 3.1 (Campo vettoriale) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso. Una funzione $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua è detta campo vettoriale.

Definizione 3.2 (1-forma differenziale) Si definisce 1-forma differenziale $\omega = \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), d\mathbf{x} \rangle$.

Definizione 3.3 (Lavoro) Sia $\gamma \subseteq A$ una curva regolare (a tratti) orientabile con orientamento $\hat{\tau}$. Il lavoro di $\mathbf{f}$ lungo γ è

$$L_{\gamma, \hat{\tau}} = \int_{\gamma, \hat{\tau}} \omega = \int_{\gamma, \hat{\tau}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), d\mathbf{x} \rangle = \int_{\gamma} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau} \rangle ds$$

dove s è l'ascissa curvilinea.

Osservazione Se cambia l'orientamento da $(\gamma, \hat{\tau})$ in $(\gamma, -\hat{\tau})$, allora $L_{\gamma, -\hat{\tau}} = -L_{\gamma, \hat{\tau}}$.

Se si considera la parametrizzazione $\mathbf{r} : [a, b] \xrightarrow{\text{su}} \gamma$, dove si assume che l'orientamento indotto dalla parametrizzazione sia compatibile con $\hat{\tau}$, allora il lavoro si può calcolare come segue:

$$L_{\gamma, \hat{\tau}} = \int_a^b \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)), \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right\rangle \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)), \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\rangle dt$$

Teorema 3.1 (Cambio di parametrizzazione e lavoro) Sia $\mathbf{r} : [a, b] \xrightarrow{\text{su}} \gamma$ una parametrizzazione regolare che induce l'orientamento $\hat{\tau}_r$ su γ e sia $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} \circ \varphi$ una nuova parametrizzazione con $\hat{\tau}_{\rho}$ l'orientamento indotto da essa. Allora:

- Se φ è un diffeomorfismo crescente, $L_{\gamma, \hat{\tau}_{\rho}} = L_{\gamma, \hat{\tau}_r}$
- Se φ è un diffeomorfismo crescente, $L_{\gamma, \hat{\tau}_{\rho}} = -L_{\gamma, \hat{\tau}_r}$

Dimostrazione. La dimostrazione è identica a quella della proposizione 2.2 in cui si applica il cambiamento di variabile all'integrale, con la differenza che la derivata del diffeomorfismo non è all'interno del valore assoluto per cui il segno del lavoro varia a seconda del segno di quest'ultima.

$$L_{\gamma, \hat{\tau}_{\rho}} = \int_{\alpha}^{\beta} \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}(\varphi(u))), \frac{d\mathbf{r}}{dt}(\varphi(u)) \right\rangle \frac{d\varphi}{du}(u) du$$

$\square$

4 Campi vettoriali conservativi

Definizione 4.1 (Campo vettoriale conservativo) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}(A, \mathbb{R}^n)$. $\mathbf{f}$ è un campo vettoriale conservativo se $\exists U \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$ tale che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla U(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A$$

In tal caso U è detto potenziale del campo $\mathbf{f}$.

Proposizione 4.1 Siano $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}(A, \mathbb{R}^n)$ con A aperto connesso e $U \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$ un suo potenziale. Allora $V \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$ è un potenziale di $\mathbf{f}$ $\iff \exists k \in \mathbb{R}$ tale che $V(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) + k \quad \forall \mathbf{x} \in A$. $\square$

Teorema 4.2 (Campi vettoriali conservativi e lavoro) Sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}(A, \mathbb{R}^n)$ un campo conservativo definito in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso e sia $U \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$ un suo potenziale. Allora, se $(\gamma, \hat{\tau}) \subseteq A$ è una curva regolare a tratti orientabile con primo estremo $\mathbf{x}_i$ e secondo estremo $\mathbf{x}_f$,

$$L_{\gamma, \hat{\tau}} = U(\mathbf{x}_f) - U(\mathbf{x}_i)$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{r} : [a, b] \xrightarrow{\text{su}} \gamma$ una parametrizzazione regolare a tratti che induce $\hat{\tau}$.

$$\begin{aligned} L_{\gamma, \hat{\tau}} &= \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t) \rangle dt = \\ &= \int_a^b \langle \nabla U(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t) \rangle dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (U \circ \mathbf{r})(t) dt = \\ &= U(\mathbf{x}_f) - U(\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.3 (Caratterizzazione dei campi vettoriali conservativi) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}(A, \mathbb{R}^n)$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $\mathbf{f}$ è un campo vettoriale conservativo
2. Per ogni coppia di curve regolari a tratti orientate $(\gamma_1, \hat{\tau}_1), (\gamma_2, \hat{\tau}_2)$ con estremi coincidenti e $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq A$ vale

$$L_{\gamma_1, \hat{\tau}_1} = L_{\gamma_2, \hat{\tau}_2}$$

3. Per ogni curva chiusa regolare a tratti orientabile con sostegno $\gamma \subseteq A$ e orientamento $\hat{\tau}$ vale $L_{\gamma, \hat{\tau}} = 0$ $\square$

Osservazione Il punto 1 implica il punto 2 per il teorema 4.2. I punti 2 e 3 sono ovviamente equivalenti. Dimostrare che il punto 2 implica il punto 1 comporta verificare che $U(\mathbf{x}) = \int_{\gamma, \hat{\tau}} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau} \rangle ds$ è $\mathcal{C}^{(1)}$ in A e che è un potenziale per $\mathbf{f}$. Occorre utilizzare piccoli spostamenti e studiare come varia $\mathbf{f}$.

Definizione 4.2 (Campo vettoriale irrotazionale) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R}^n)$. $\mathbf{f}$ è detto irrotazionale se ha matrice jacobiana simmetrica, ovvero se

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A \quad \forall i, j \in [n]$$

Teorema 4.4 Se $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R}^n)$ con A aperto connesso è conservativo, allora è irrotazionale.

Dimostrazione. $U(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^{(2)}$, quindi vale il teorema di Schwarz (Thm. 2.1, Cap. 3).

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

$\square$

Definizione 4.3 (Insieme convesso) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto è un insieme convesso se $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ il segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq A$.

Definizione 4.4 (Insieme stellato rispetto a un punto) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x}_0 \in A$. A è stellato rispetto a $\mathbf{x}_0$ se $\forall \mathbf{x} \in A, [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subseteq A$.

Definizione 4.5 (Insieme semplicemente connesso) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso se ogni curva regolare semplice chiusa contenuta in A può essere deformata con continuità a un punto in A restando in A .

Osservazione Convesso $\implies$ stellato rispetto a ogni punto $\implies$ semplicemente connesso $\implies$ connesso per archi $\implies$ connesso.

Lemma 4.5 (di Poincaré) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto convesso oppure stellato rispetto a un punto oppure semplicemente connesso. Sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale irrotazionale. Allora $\mathbf{f}$ è conservativo in A . $\square$

Corollario 4.5.1 Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale irrotazionale. Allora $\forall B \subseteq A$ convesso oppure stellato oppure semplicemente connesso $\mathbf{f}$ è conservativo se ristretto a B .

Teorema 4.6 Sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0), \mathbb{R}^2)$ un campo vettoriale irrotazionale. Se, detta γ la circonferenza di raggio unitario centrata in $(0, 0)$ e orientamento arbitrario, $L_{\gamma, \hat{\tau}} = 0$, allora $\mathbf{f}$ è conservativo.

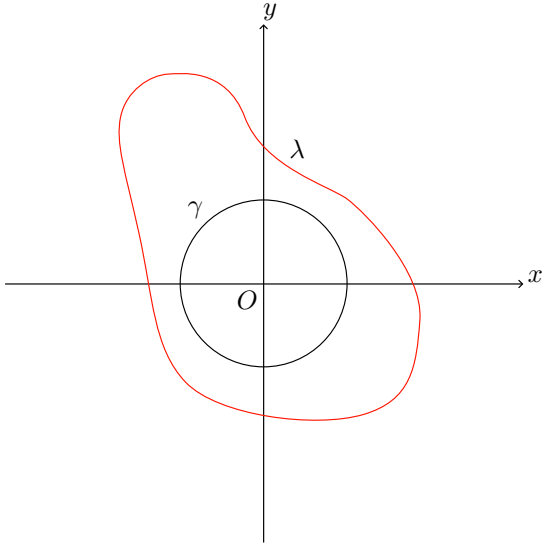


Figura 6.1: Il lavoro sulla circonferenza γ è nullo per ipotesi. La curva λ racchiude al suo interno il punto $(0, 0)$.

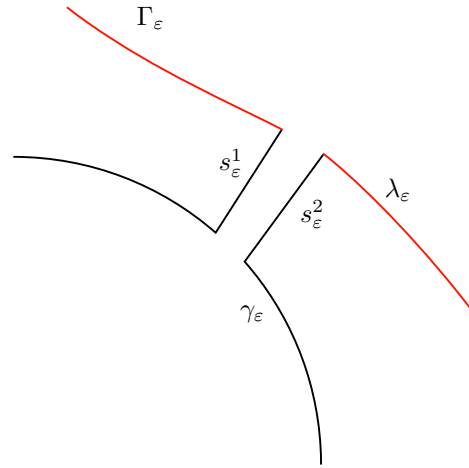


Figura 6.2: La curva Γ_ε è composta dalla circonferenza γ_ε , dalla curva λ_ε e dai segmenti congiungenti s_ε^1 e s_ε^2 .

Dimostrazione. Sia λ una qualsiasi curva chiusa nel piano. L'unico caso da analizzare è quello in cui l'insieme che ha come bordo λ contiene al suo interno il punto $(0, 0)$ (Fig. 6.1), poiché si sa già che $\mathbf{f}$ è conservativo su qualsiasi curva che non racchiude $(0, 0)$ per il corollario 4.5.1. Si definisca la curva Γ_ε (Fig. 6.2), ottenuta separando di $\varepsilon > 0$ due estremi della curva λ e due estremi della curva γ , per poi connetterli fra loro con due tratti chiamati s_ε^1 e s_ε^2 . Il lavoro di $\mathbf{f}$ lungo Γ_ε è nullo perché Γ_ε è contenuta in un insieme semplicemente connesso (non racchiude il punto $(0, 0)$). Il lavoro su Γ_ε è la somma dei lavori su $\lambda_\varepsilon, \gamma_\varepsilon, s_\varepsilon^1$ e s_ε^2 . Mandando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma$, cioè $s_\varepsilon^1, s_\varepsilon^2 \rightarrow \tilde{s}$, $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda$ e $\gamma_\varepsilon \rightarrow \gamma$.

$$\int_{s_\varepsilon^1} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau}_\varepsilon^1 \rangle + \int_{s_\varepsilon^2} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau}_\varepsilon^2 \rangle \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \lambda_\varepsilon, \gamma_\varepsilon \rightarrow \tilde{s}}]{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tilde{s}} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau} \rangle ds + \int_{\tilde{s}} \langle \mathbf{f}, -\hat{\tau} \rangle ds = 0$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau}_\varepsilon \rangle \xrightarrow[\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda, \gamma_\varepsilon \rightarrow \gamma]{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau} \rangle ds + \int_{\lambda} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau} \rangle ds \\ &\implies \int_{\lambda} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau} \rangle ds = 0 \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio è stata usata l'ipotesi che il lavoro su γ sia nullo. $\square$

Capitolo 7

Integrali di superficie

1 Superfici

Definizione 1.1 (Aperto regolare in $\mathbb{R}^2$) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, connesso e limitato è un aperto regolare di $\mathbb{R}^2$ se $\partial\bar{\Omega} = \partial\Omega$ e $\partial\Omega$ è l'unione finita e disgiunta di curve regolari a tratti, semplici e chiuse.

Definizione 1.2 (Superficie) Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto regolare e $\mathbf{r} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \in \mathcal{C}^{(1)}$. Si definisce superficie $\Sigma = \mathbf{r}(\bar{\Omega})$. Σ è detta regolare se $\text{rank } J_{\mathbf{r}}(u, v) = 2 \ \forall (u, v) \in \Omega$. Σ è detta semplice se $\mathbf{r} : \Omega \xrightarrow{1-1} \Sigma$.

Osservazione La superficie è la classe di equivalenza delle parametrizzazioni che si ottengono le une dalle altre per composizione con un diffeomorfismo $\mathcal{C}^{(1)}$ fra aperti regolari di $\mathbb{R}^2$. Esse conservano le proprietà della superficie, regolarità e semplicità.

Definizione 1.3 (Superficie orientabile) $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ è una superficie orientabile se $\exists \mathbf{N} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3 \in \mathcal{C}^{(0)}$ tale che $\mathbf{N}(x, y, z) \in N_{(x, y, z)}\Sigma$ e $\|\mathbf{N}(x, y, z)\| = 1 \ \forall (x, y, z) \in \Sigma$, ovvero se esiste un campo continuo di versori normali a Σ .

Sia $\mathbf{r} : \bar{\Omega} \rightarrow \Sigma$ una parametrizzazione regolare. Le derivate parziali di $\mathbf{r}$ rispetto a u e v appartengono allo spazio tangente a Σ in $\mathbf{r}(u, v)$, allora il loro prodotto vettoriale $\mathbf{n}(u, v) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)(u, v) \in N_{\mathbf{r}(u, v)}\Sigma$ e si definisce l'orientamento indotto dalla parametrizzazione come

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{(\partial_u \mathbf{r} \wedge \partial_v \mathbf{r})(u, v)}{\|(\partial_u \mathbf{r} \wedge \partial_v \mathbf{r})(u, v)\|} \in N_{\mathbf{r}(u, v)}\Sigma$$

Osservazione Applicando un diffeomorfismo φ all'aperto regolare Ω si conclude che diffeomorfismi crescenti, ovvero con $\det J_{\varphi} > 0$, non variano l'orientamento della superficie. Diffeomorfismi decrescenti, ovvero con $\det J_{\varphi} < 0$, inducono l'orientamento opposto.

Definizione 1.4 (Superficie regolare con bordo) Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto regolare e $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^{(1)}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$. $\Sigma = \mathbf{r}(\bar{\Omega})$ è una superficie regolare con bordo se:

1. $\mathbf{r} : \bar{\Omega} \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \Sigma$
2. $\text{rank } J_{\mathbf{r}}(u, v) = 2 \ \forall (u, v) \in \bar{\Omega}$

Teorema 1.1 Ogni superficie regolare con bordo è orientabile. □

Definizione 1.5 (Frontiera orientata canonicamente) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto regolare e siano $\mathbf{T}(u, v) \in T_{(u, v)}\partial\Omega$ e $\mathbf{N}(u, v) = (T_2(u, v), -T_1(u, v)) \in N_{(u, v)}\partial\Omega$. $(\partial\Omega, \mathbf{T})$ è orientata canonicamente se $\forall (u, v) \in \partial\Omega \ \exists \lambda > 0$ tale che $\forall \varepsilon \in (0, \lambda)$

- a. $(u, v) + \varepsilon \mathbf{N}(u, v) \notin \bar{\Omega}$
- b. $(u, v) - \varepsilon \mathbf{N}(u, v) \in \Omega$

Definizione 1.6 (Orientamento canonico di $\partial\Sigma$) Sia $\mathbf{r} : \bar{\Omega} \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \Sigma \in \mathcal{C}^{(1)}$ tale che $\text{rank } J_{\mathbf{r}}(u, v) = 2 \ \forall (u, v) \in \bar{\Omega}$ una parametrizzazione che induce l'orientamento $\hat{\nu}$ su Σ . Siano inoltre $\gamma_1 \subset \partial\Omega$ e $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma_1 \in \mathcal{C}^{(1)}$ una parametrizzazione regolare semplice a tratti che induce l'orientamento canonico $\mathbf{T}$ su γ_1 . Allora $\mathbf{r} \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \partial\Sigma_1$ è una parametrizzazione regolare semplice a tratti che induce l'orientamento $\hat{\tau}$ canonico rispetto a $\hat{\nu}$.

Definizione 1.7 (Superficie regolare a tratti) Siano $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p$ superfici regolari con bordo, allora $\Sigma = \bigcup_{j=1}^p \Sigma_j$ è una superficie regolare a tratti se $\forall i, j \in [p]$ con $i \neq j$ $\Sigma_i \cap \Sigma_j \subseteq \bigcup_{k=1}^p \partial \Sigma_k$.

Definizione 1.8 (Superficie regolare a tratti orientabile) Σ superficie regolare a tratti è detta orientabile se ciascuna componente di $\partial \Sigma_j$ è orientabile in modo tale che sugli spigoli comuni questi abbiano orientamento opposto.

Definizione 1.9 (Superficie chiusa) Una superficie regolare a tratti è chiusa se $\partial \Sigma = \emptyset$ e se è limitata.

Definizione 1.10 (Area di una superficie) Sia $\mathbf{r} : \bar{\Omega} \xrightarrow{1-1} \Sigma$ tale che $\text{rank } J_{\mathbf{r}}(u, v) = 2 \forall (u, v) \in \bar{\Omega}$.

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} dS = \iint_{\bar{\Omega}} \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) (u, v) \right\| du dv$$

Inoltre, sia $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

$$\iint_{\Sigma} f dS = \iint_{\bar{\Omega}} (f \circ \mathbf{r})(u, v) \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) (u, v) \right\| du dv$$

Definizione 1.11 (Flusso) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto e sia $\Sigma \subseteq A$ una superficie orientabile con orientamento $\hat{\nu}$ indotto dalla parametrizzazione $\mathbf{r} : \bar{\Omega} \rightarrow \Sigma$. Sia inoltre $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}(A, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Il flusso di $\mathbf{f}$ attraverso Σ è

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{f}, \hat{\nu} \rangle dS &= \iint_{\bar{\Omega}} \left\langle (\mathbf{f} \circ \mathbf{r})(u, v), \frac{(\partial_u \mathbf{r} \wedge \partial_v \mathbf{r})(u, v)}{\|(\partial_u \mathbf{r} \wedge \partial_v \mathbf{r})(u, v)\|} \right\rangle \|(\partial_u \mathbf{r} \wedge \partial_v \mathbf{r})(u, v)\| du dv = \\ &= \iint_{\bar{\Omega}} \left\langle (\mathbf{f} \circ \mathbf{r})(u, v), \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) (u, v) \right\rangle du dv \end{aligned}$$

Osservazione Se $\mathbf{r}$ induce l'orientamento opposto,

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{f}, \hat{\nu} \rangle dS = - \iint_{\bar{\Omega}} \left\langle (\mathbf{f} \circ \mathbf{r})(u, v), \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) (u, v) \right\rangle du dv$$

2 Teorema di Stokes

Definizione 2.1 (Rotore) Sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)}(A \subseteq \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ con A aperto un campo vettoriale. Si definisce rotore di $\mathbf{f}$

$$\text{rot } \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Teorema 2.1 (di Stokes o del rotore) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R}^3)$, $\Sigma \subseteq A$ una superficie regolare con bordo con orientamento $\hat{\nu}$ e $(\partial \Sigma, \hat{\tau})$ il suo bordo con orientamento indotto canonicamente. Allora

$$\iint_{\Sigma} \langle \text{rot } \mathbf{f}, \hat{\nu} \rangle d\sigma = \int_{\partial \Sigma} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau} \rangle ds$$

Dimostrazione in un caso particolare. Si consideri il rettangolo $W = \{(x, y, 0) \in [a, b] \times [c, d]\}$ posto nel piano xy con orientamento $\hat{\mathbf{k}}$. Il flusso del rotore di $\mathbf{f}$ attraverso il rettangolo è

$$\begin{aligned} \iint_W \langle \text{rot } \mathbf{f}, \hat{\nu} \rangle d\sigma &= \iint_W \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, 0) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, 0) \right) dx dy = \\ &= \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, 0) dx - \int_a^b dx \int_c^d \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, 0) dy = \\ &= \int_c^d (f_2(b, y, 0) - f_2(a, y, 0)) dy + \int_a^b (f_1(x, c, 0) - f_1(x, d, 0)) dx \end{aligned}$$

Il lavoro di $\mathbf{f}$ sul bordo del rettangolo W orientato canonicamente rispetto a $\hat{\mathbf{k}}$ è la somma dei lavori sui tratti del bordo, ovvero

$$\begin{aligned} & \int_a^b f_1(x, c, 0) dx + \int_c^d f_2(b, y, 0) dy + \int_b^a f_1(x, d, 0) dx + \int_d^c f_2(a, y, 0) dy = \\ &= \int_a^b (f_1(x, c, 0) - f_1(x, d, 0)) dx + \int_c^d (f_2(b, y, 0) - f_2(a, y, 0)) dy \end{aligned}$$

I due integrali coincidono. $\square$

Teorema di Stokes tramite le forme differenziali Il teorema di Stokes può essere espresso anche tramite l'integrazione di una forma differenziale d'area (o 2-forma), ricavata applicando l'operatore differenziale esterno alla 1-forma associata al lavoro (Def. 3.2, Cap. 6) usando le tre regole seguenti:

- a. $d(d\alpha) = 0$
- b. $d\alpha \wedge d\alpha = 0$
- c. $d\alpha \wedge d\beta = -d\beta \wedge d\alpha$

$$\begin{aligned} d\omega &= d(f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) = \\ &= df_1 \wedge dx + df_2 \wedge dy + df_3 \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \\ &+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \\ &+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy + \frac{\partial f_3}{\partial z} dz \right) \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \\ &= \langle \mathbf{rot} \mathbf{f}, \hat{\nu} \rangle du \wedge dv \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\iint_{\Sigma, \hat{\nu}} d\omega = \int_{\partial \Sigma, \hat{\tau}} \omega$$

Osservazione Per passare da $du \wedge dv$ a $dudv$ nell'integrale è necessario verificare l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzata. Se la parametrizzazione induce l'orientamento corretto, $du \wedge dv = dudv$, altrimenti $du \wedge dv = -dudv$.

3 Teorema di Gauss

Definizione 3.1 (Aperto regolare in $\mathbb{R}^3$) $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto regolare se è aperto, limitato, connesso, $\bar{A} = A \cup \partial A$ e ∂A è l'unione finita di superfici regolari a tratti chiuse e orientabili a due a due disgiunte. Se $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto regolare, ∂A è orientata canonicamente se $\forall (x, y, z) \in \partial A \exists \varepsilon > 0$ tale che $\forall \lambda \in (0, \varepsilon)$

- a. $(x, y, z) + \lambda \hat{\nu}(x, y, z) \notin \bar{A}$
- b. $(x, y, z) - \lambda \hat{\nu}(x, y, z) \in A$

Definizione 3.2 (Divergenza) Sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)}(A \subseteq \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Si definisce divergenza di $\mathbf{f}$

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \in \mathbb{R}$$

Teorema 3.1 (di Gauss o della divergenza) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto regolare, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)}(\bar{A}, \mathbb{R}^3)$ e $(\partial A, \hat{\nu})$ la frontiera di A orientata canonicamente. Allora

$$\iiint_A \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\partial A} \langle \mathbf{f}, \hat{\nu} \rangle d\sigma$$

Giustificazione in un caso semplice. Si consideri il cubo $Q = \{(x, y, z) \in [0, L] \times [0, L] \times [0, L]\}$. Il flusso del campo $\mathbf{f}$ attraverso le facce di ∂Q parallele al piano xz è

$$\iint_{\partial Q_y} \langle \mathbf{f}, \hat{\nu} \rangle = - \iint_{[0, L] \times [0, L]} f_2(x, 0, z) dx dz + \iint_{[0, L] \times [0, L]} f_2(x, L, z) dx dz$$

L'integrale del termine della divergenza dipendente da y è

$$\iiint_Q \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) dx dy dz = \iint_{[0, L] \times [0, L]} (f_2(x, L, z) - f_2(x, 0, z)) dx dz$$

I due integrali coincidono ed è possibile applicare lo stesso ragionamento alle variabili x e z . □

Teorema di Gauss tramite le forme differenziali Anche nel caso del teorema di Gauss è possibile esprimere l'enunciato del teorema in termini di forme differenziali. Sia $\omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$ la forma differenziale d'area associata al flusso del campo $\mathbf{f}$. Applicando l'operatore differenziale esterno, si ottiene che

$$\begin{aligned} d\omega &= d(f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy) = \\ &= df_1 \wedge dy \wedge dz + df_2 \wedge dz \wedge dx + df_3 \wedge dx \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Di conseguenza, si può scrivere

$$\iiint_A d\omega = \iint_{\partial A^+} \omega$$

dove ∂A^+ è la frontiera di A orientata canonicamente.

Osservazione Si noti che la somiglianza fra il teorema di Gauss e il teorema di Stokes è dovuta al fatto che essi sono casi particolari dello stesso teorema applicato a dimensioni diverse.

Capitolo 8

Misura e integrazione secondo Lebesgue

1 Misura di Lebesgue

Definizione 1.1 (Misura esterna) Siano X un insieme e $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$ l'insieme delle parti di X . $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura esterna se soddisfa le seguenti condizioni:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. (Monotonia) Se $A \subseteq B$, allora $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. (Sub-additività numerabile) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

Definizione 1.2 (σ -algebra) Sia X un insieme. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una σ -algebra se:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. Se $A \in \mathcal{A}$, allora $X \setminus A \in \mathcal{A}$
3. Se $A_j \in \mathcal{A}$ con $j \in \mathbb{N}$, allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Proposizione 1.1 Se $C \subseteq \mathcal{P}(X)$, allora C può essere sempre completato a una σ -algebra ed esiste il completamento minimo $\mathcal{A}(C)$ che è la σ -algebra più piccola in $\mathcal{P}(X)$ contenente C .

$$\mathcal{A}(C) = \cap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ è una } \sigma\text{-algebra in } \mathcal{P}(X), C \subseteq \mathcal{A}\}$$

□

Osservazione

1. $\{\emptyset, X\}$ è la più piccola σ -algebra associata ad X
2. $\mathcal{P}(X)$ è la più grande σ -algebra associata ad X

Definizione 1.3 (σ -algebra di Borel) Sia (X, τ) uno spazio topologico. Si definisce σ -algebra di Borel la più piccola σ -algebra in X contenente τ .

Definizione 1.4 (Spazio misurabile) Si definisce spazio misurabile la coppia $(X, \mathcal{A})$, dove X è un insieme e $\mathcal{A}$ una σ -algebra contenuta in $\mathcal{P}(X)$.

Definizione 1.5 (Misura) Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura se soddisfa le seguenti richieste:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. (Additività numerabile) Se $A_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{N}$ sono insiemi a due a due disgiunti, allora

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

μ si dice finita se $\mu(X) < +\infty$. μ si dice σ -finita se esistono A_i con $i \in \mathbb{N}$ insiemi misurabili di misura finita e $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Osservazione La proprietà di monotonia discende dal fatto che la misura è sempre definita a partire da una misura esterna.

Definizione 1.6 (Spazio di misura) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è detto spazio di misura.

Definizione 1.7 (Spazio di misura completo) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura completo se $\forall N \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(N) = 0$ tutti i suoi sottoinsiemi sono misurabili, cioè $\forall M \subseteq N, M \in \mathcal{A}$.

Teorema 1.2 (Successioni monotone in uno spazio di misura) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura.

1. Se $A_i \in \mathcal{A}$ è una successione crescente, cioè $A_i \subseteq A_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$, allora $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(A_i)$
2. Se $A_i \in \mathcal{A}$ è una successione decrescente, cioè $A_i \supseteq A_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$ e $\exists j \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(A_j) < +\infty$, allora $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(A_i)$

□

Definizione 1.8 (Intervallo) Sia $(\mathbb{R}^n, \tau)$ lo spazio topologico euclideo. Si definisce intervallo $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$. La misura elementare di R è $\mu(R) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$. Si indica con $\mathcal{R}$ l'insieme degli intervalli di $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) : A \text{ è un intervallo}\}$.

Definizione 1.9 (Misura esterna di Lebesgue) Si definisce la misura esterna di Lebesgue $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ tale che, se $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(R_j) : R_j \in \mathcal{R} \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \right\}$$

Teorema 1.3 μ^* è una misura esterna, cioè

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. Se $A \subseteq B$, allora $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. Se $A_i \subseteq \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N}$, allora $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

Dimostrazione del punto 3. Sia $\varepsilon > 0$. $\forall i \in \mathbb{N}$ è possibile trovare un ricoprimento di A_i tale che

$$A_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_{ij} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(R_{ij}) \leq \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Si noti che l'unico caso da dimostrare è quello in cui $\mu^*(A_i) < +\infty \forall i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) < +\infty$, perché altrimenti è ovvio che $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq +\infty$. $\bigcup_{i,j=1}^{\infty} R_{ij}$ è un ricoprimento di $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \mu^*(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(R_{ij}) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon \\ &\implies \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \end{aligned}$$

□

Proposizione 1.4 La misura elementare di un intervallo $R \in \mathcal{R}$ coincide con la misura esterna di Lebesgue dell'intervallo. □

1.1 Metodo di Carathéodory

Definizione 1.10 (Insieme misurabile secondo Carathéodory) Siano X un insieme e $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ una misura esterna su X . $A \subseteq X$ è misurabile secondo Carathéodory se $\forall E \subseteq X$, $\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^C \cap E)$, dove $A^C = X \setminus A$.

Teorema 1.5 (Costruzione della misura) Siano X un insieme e μ^* una misura esterna su $\mathcal{P}(X)$. Allora l'insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ degli insiemi misurabili secondo Carathéodory rispetto a μ^* è una σ -algebra e $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ è una misura. $\square$

Definizione 1.11 (Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$) Sia $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo Carathéodory rispetto alla misura esterna di Lebesgue. La misura di Lebesgue è $\mu = \mu^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

Teorema 1.6 (Completezza della misura di Lebesgue) La misura di Lebesgue è una misura completa, cioè:

1. $\forall N \subseteq \mathbb{R}^n$ con misura esterna nulla, $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$
2. $\forall M \subseteq N$ con $\mu(N) = 0$, $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Dimostrazione. Si dimostra ciascun punto separatamente.

1. Siano $\mu^*(N) = 0$ e $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si noti che per la proprietà di subaddittività è ovvio che $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap N) + \mu^*(E \cap N^C)$, quindi resta da dimostrare solo che $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap N^C) + \mu^*(E \cap N)$.
 $E \cap N \subseteq N \implies \mu^*(E \cap N) \leq \mu^*(N) = 0 \implies \mu^*(E \cap N) = 0$. Inoltre $E \supseteq E \cap N^C$, quindi $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap N^C) = \mu^*(E \cap N^C) + \mu^*(E \cap N)$. Quindi N è misurabile secondo Carathéodory.
2. $\forall M \subseteq N$ $\mu^*(M) \leq \mu^*(N) = 0$, quindi anche $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Osservazione Nella dimostrazione non viene usata la definizione di misura esterna di Lebesgue. Tutte le misure costruite con il metodo di Carathéodory sono complete.

Definizione 1.12 (Insieme di misura nulla) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ha misura di Lebesgue nulla se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento numerabile di E con intervalli tale che $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$, $R_j \in \mathcal{R}$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(R_j) < \varepsilon$.

Teorema 1.7 (Relazione fra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$) Sia $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la σ -algebra di Borel in $\mathbb{R}^n$. Allora

1. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ è la più piccola σ -algebra che contenga $\mathcal{R}$, cioè gli intervalli di $\mathbb{R}^n$
2. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$
3. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ non è completo rispetto alla misura di Lebesgue $\square$

Teorema 1.8 (Misura con aperti e compatti)

1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, allora $\mu^*(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ con } U \text{ aperto}\}$. In particolare, se A è misurabile allora $\mu^*(A) = \mu(A)$
2. Se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, allora $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compatto}, K \subseteq A\}$ $\square$

Corollario 1.8.1 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists V \text{ chiuso}, U \text{ aperto}, V \subseteq A \subseteq U \text{ tale che } \mu(U \setminus V) < \varepsilon$. $\square$

Definizione 1.13 (G_δ e F_σ) Si definiscono i seguenti insiemi:

- $G_\delta = \left\{ G \subseteq \mathbb{R}^n : G = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j, U_j \text{ aperto } \forall j \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$
- $F_\sigma = \left\{ F \subseteq \mathbb{R}^n : F = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, C_j \text{ chiuso } \forall j \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Teorema 1.9 $\forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \exists G \in G_\delta, F \in F_\sigma$ tale che $F \subseteq A \subseteq G$ e $\mu(G \setminus A) = \mu(A \setminus F) = 0$. In altre parole, ogni insieme misurabile secondo Lebesgue è approssimato a meno di insiemi di misura nulla da un insieme in F_σ per difetto e da un insieme in G_δ per eccesso. $\square$

Corollario 1.9.1 *Il completamento della σ -algebra di Borel è la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue. Per ottenerla vengono aggiunti gli insiemi di misura nulla.* $\square$

Teorema 1.10 (Invarianza della misura di Lebesgue per isometrie)

1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Sia $A_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x} + \mathbf{h} : \mathbf{x} \in A\}$ il traslato di A . Allora $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \iff A_{\mathbf{h}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e in tal caso $\mu(A) = \mu(A_{\mathbf{h}})$.
2. Siano $Q \in \mathcal{O}(n)$ (il gruppo delle matrici ortogonali in $\mathbb{R}^n$) e $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \iff QE \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e in tal caso $\mu(E) = \mu(QE)$.
3. Siano $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare con $\det T \neq 0$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \iff TA \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e in tal caso $\mu(TA) = |\det T| \mu(A)$. $\square$

2 Integrale di Lebesgue

Definizione 2.1 (Funzione semplice) Siano $E_j \subseteq \mathbb{R}^n$ con $j = 1, \dots, k$ insiemi misurabili secondo Lebesgue e $C_j \in \mathbb{R}$. Sia inoltre χ_{E_j} la funzione caratteristica dell'insieme E_j definita come segue:

$$\chi_{E_j}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in E_j \\ 0 & \mathbf{x} \notin E_j \end{cases}$$

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ definita come $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k C_j \chi_{E_j}(\mathbf{x})$ è detta funzione semplice. φ è una funzione semplice positiva se $C_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, k$.

Definizione 2.2 (Integrale secondo Lebesgue di una funzione semplice positiva) Sia $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k C_j \chi_{E_j}(\mathbf{x})$ con $C_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, k$. Si definisce integrale secondo Lebesgue di φ

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \sum_{j=1}^k C_j \mu(E_j)$$

con la convenzione che se $C_j = 0$ e $\mu(E_j) = +\infty$, allora $C_j \mu(E_j) = 0$. Inoltre φ si dice sommabile se $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi < +\infty$.

Teorema 2.1 (Proprietà dell'integrale di Lebesgue sulle funzioni semplici positive)

1. (Linearità) Se φ, ψ sono funzioni semplici positive e $c \in \mathbb{R}^+$, allora $c\varphi + \psi$ è una funzione semplice positiva e $\int (c\varphi + \psi) = c \int \varphi + \int \psi$
2. (Monotonia) Se φ, ψ sono funzioni semplici positive e $\varphi \leq \psi \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, allora $\int \varphi \leq \int \psi$ $\square$

Definizione 2.3 (Funzione misurabile secondo Lebesgue) Siano $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. f è misurabile secondo Lebesgue se $\forall \beta \in \mathbb{R}, \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) < \beta\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione Le funzioni semplici sono misurabili secondo Lebesgue.

Teorema 2.2 (Caratterizzazione delle funzioni misurabili positive tramite funzioni semplici positive) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue e $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile secondo Lebesgue. Allora esiste una successione crescente di funzioni semplici non negative $\varphi_k : A \rightarrow [0, +\infty)$ convergenti ad f puntualmente. Inoltre se f è limitata, la convergenza delle φ_k a f è uniforme.

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, si consideri l'intervallo $[0, 2^k]$ nell'insieme dei valori di f e lo si divida in 2^{2k} sottointervalli di ampiezza 2^{-k} .

$$I_{k,l} = \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k} \right) \text{ con } l = 1, \dots, 2^{2k} - 1$$

Si definisca $J_k = [2^k, +\infty]$. Siano inoltre

$$E_{k,l} = f^{-1}(I_{k,l}) \text{ e } F_k = f^{-1}(J_k)$$

$E_{k,l}$ e F_k sono misurabili. Allora la successione

$$\varphi_k = \sum_{l=0}^{2^k-1} \frac{l}{2^k} \chi_{E_{k,l}} + 2^k \chi_{F_k}$$

soddisfa alla tesi del teorema. $\square$

Definizione 2.4 (Integrale di Lebesgue di una funzione misurabile non negativa) Se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \rightarrow [0, +\infty)$ è misurabile, allora $\int_A f = \sup\{\int_A \varphi_k : \varphi_k \leq f, \varphi_k \text{ è una funzione semplice positiva}\}$. In particolare, f è detta sommabile se $\int_A f < +\infty$.

Teorema 2.3 (Proprietà dell'integrale di funzioni misurabili non negative)

1. Ogni funzione misurabile non negativa definita in un insieme misurabile è integrabile secondo Lebesgue
2. (Linearità) Se $f, g : A \rightarrow [0, +\infty]$ sono misurabili in $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, allora $f + cg$ con $c \in \mathbb{R}^+$ è misurabile e $\int_A (f + cg) = \int_A f + c \int_A g$
3. (Monotonia) Se $f, g : A \rightarrow [0, +\infty]$ sono misurabili in $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $f \leq g$, allora $\int_A f \leq \int_A g$
4. Se $B \subseteq A$ con $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, allora $\int_B f = \int_A \chi_B f$ $\square$

Teorema 2.4 (Proprietà delle funzioni misurabili) Siano $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili e $c \in \mathbb{R}$. Allora $f + g$, cf , f/g , $|f|$, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono misurabili in A . Nel caso della divisione, $g(\mathbf{x}) \neq 0 \forall \mathbf{x} \in A$. $\square$

Teorema 2.5 (Misurabilità e convergenza puntuale) Siano $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $k \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni misurabili e $f(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in A$. Allora f è misurabile secondo Lebesgue. $\square$

Definizione 2.5 (Funzione integrabile di segno variabile) Siano $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile secondo Lebesgue. Si definiscono la parte positiva f_+ e la parte negativa f_- di f come nella Definizione 2.2 del Capitolo 5. f_+ e f_- sono misurabili. Se almeno uno fra $\int_A f_+$ e $\int_A f_-$ è finito, si definisce $\int_A f = \int_A f_+ - \int_A f_-$. Se $\int_A f_+, \int_A f_- < +\infty$, f è detta sommabile.

Teorema 2.6 (Proprietà dell'integrale di Lebesgue) Se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $f, g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sono misurabili e sommabili secondo Lebesgue, allora:

1. (Linearità) $\forall c \in \mathbb{R}$, $f + cg$ è sommabile e $\int_A (f + cg) = \int_A f + c \int_A g$
2. (Monotonia) Se $f \leq g$, allora $\int_A f \leq \int_A g$
3. $|f|$ è sommabile e $|\int_A f| \leq \int_A |f|$ $\square$

Teorema 2.7 (Integrale di Riemann e di Lebesgue)

1. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann, allora f è integrabile secondo Lebesgue e

$$\int_{a(\mathcal{R})}^b f = \int_{a(\mathcal{L})}^b f$$

2. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile secondo Lebesgue. Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se soddisfa queste condizioni:

- a. f è limitata
- b. L'insieme dei punti di discontinuità di f ha misura di Lebesgue nulla $\square$

Le funzioni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ oppure monotone in $[a, b]$ sono integrabili secondo Riemann e quindi anche secondo Lebesgue. La funzione di Dirichlet ($\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$) non è integrabile secondo Riemann, ma lo è secondo Lebesgue e ha integrale nullo. La funzione

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left[x \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right] \text{ con } x \in [0, 1]$$

non è integrabile secondo Lebesgue, ma è integrabile in senso generalizzato secondo Riemann.

Teorema 2.8 (di Fubini) Sia $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile secondo Lebesgue. $|f|$ è sommabile in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ se e solo se almeno uno dei seguenti integrali esiste finito: $\int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^m} |f|) < +\infty$ oppure $\int_{\mathbb{R}^m} (\int_{\mathbb{R}^n} |f|) < +\infty$. In tal caso f è sommabile e

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} \left(\int_{\mathbb{R}^m} d\mathbf{y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) = \int_{\mathbb{R}^m} d\mathbf{y} \left(\int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right)$$

□

2.1 Lebesgue e i limiti di successioni

Teorema 2.9 (Successioni di funzioni sommabili uniformemente convergenti) Siano $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ limitato e $f_k, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $k \in \mathbb{N}$ misurabili. Se $f_k \Rightarrow f$ in A e f_k è sommabile $\forall k \in \mathbb{N}$, allora f è sommabile e $\int_A f = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k$.

Dimostrazione. f è sommabile:

$$\left| \int_A (f - f_k) \right| \leq \int_A |f - f_k| \leq \int_A \sup_{x \in A} |f - f_k| = M_k \mu_n(A) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Inoltre

$$\int_A f = \int_A (f - f_k) + \int_A f_k \Rightarrow \int_A f = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k$$

□

Teorema 2.10 (Convergenza monotona) Siano $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $f_k : A \rightarrow [0, +\infty)$ una successione crescente di funzioni misurabili. Allora

1. f_k convergono puntualmente a $f : A \rightarrow [0, +\infty]$:

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\mathbf{x}) = \sup_k f_k(\mathbf{x})$$

2. f è integrabile e $\int_A f = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k$

□

Osservazione Si noti che le f_k sono integrabili per il punto 1 del teorema 2.3. Inoltre f è misurabile per il teorema 2.5 e quindi integrabile per il punto 1 del teorema 2.3.

Teorema 2.11 (della convergenza dominata) Siano $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili. Sotto le seguenti ipotesi:

- a. $\exists g : A \rightarrow [0, +\infty)$ sommabile tale che $|f_n| \leq g \forall n \in \mathbb{N}$

- b. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{A} f$, cioè che f sia il limite puntuale di f_n

allora f_n, f sono sommabili e $\int_A f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n$.

□