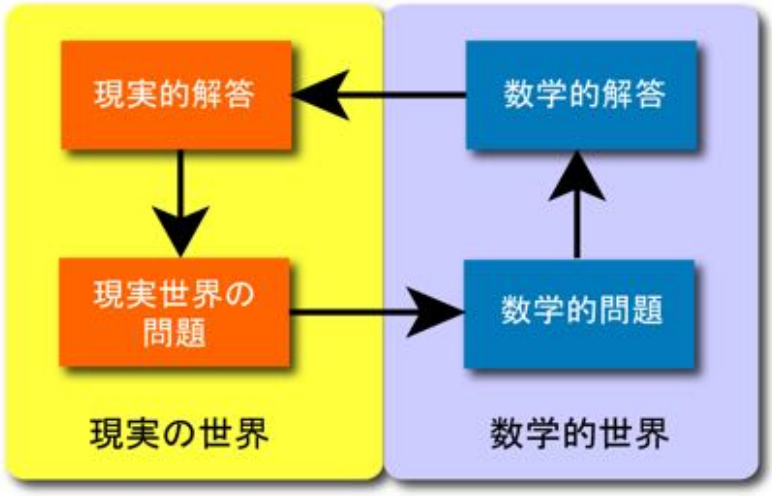
Ⅱ　シャボン玉は知っている

1. シャボン玉はなぜ丸い？

Ⅰで学習したように，シャボン膜はネットワークの最短距離を知っていることを実験で観察し，それが実際に最短距離であることを数学で解明した。そして，この結果は，施設やネットワークの配置問題，VLSI 回路の設計等に生かされる形で，現実に応用されている。

一般的には，下図のようなサイクルの形で，自然界や社会の現象や事柄を数学という言語で表現し，解明していることになる。



では，前のシャボン膜に引き続いて，自然から学んでいこう。

［課題 4］
シャボン玉は，なぜ丸いのか？　その理由を考えよ。



小さい頃(あるいはいまでも)シャボン玉を作って遊んだことだろう。そのとき，シャボン玉はなぜ丸いのか，不思議に思ったことはないだろうか？

世の中には，当たり前だと思っていることでも，よーく考えてみると不思議に思えることはたくさんある。シャボン玉がなぜ丸いのかも，その 1 つだろう。他にも，

・なぜ，平面上の 2 点を最短距離で結ぶ曲線は直線なのか？
・なぜ，光は最短時間で進むのか？

など，いろいろと考えられる。このような，直観的には明らかに思えても，改めて「なぜ？」と聞かれると答えに窮することはよくある。そのときが，数学の出番なのだ。

では，課題 4 について考えよう。シャボン玉の膜は非常に薄いために，重さを無視することにすると，シャボン玉に働く力は表面張力のみとなる。そのために，シャボン玉は一定の体積(吹きこまれた空気の量)を保つ条件のもとで，表面張力が最小になるような形をとろうとする。科学的(理科的)にいうと，自然はポテンシャルエネルギーを最小にしようとするのである。ここで，表面張力は表面積に比例すると考えられるので，シャボン玉は表面積が最小になろうとした結果として，球形になると考えられる。

つまり，シャボン玉が丸いのは，

体積が同じ立体の中で，表面積が最小となるのは球である

ということを示している。

さて，これは本当だろうか？　まずは具体的に調べてみる。

［課題 5］

次のような体積 V=1 の立体を考えるとき，それぞれの立体の表面積 A の近似値を求めよ。

(1)　球(半径 r)

(2)　正四面体(1 辺 r)

(3)　立方体(1 辺 r)

(4)　円柱(底面の半径 r，高さ 2r)

(解答)

(1)　$V=\frac{4}{3}\pi r^3=1$ より，$r=\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$

ゆえに，

$$A=4\pi r^2=4\pi\sqrt[3]{\left(\frac{3}{4\pi}\right)^2}=4\sqrt[3]{\frac{9\pi}{16}}\fallingdotseq 4.84\cdots①$$

(2)　正四面体の高さを h とすると，三平方の定理より，

$$h^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\cdot\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{3}r^2$$

よって，$h=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$

ゆえに，$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{12}r^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r=\frac{\sqrt{2}}{12}r^3=1$

よって，$r^3=\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$ だから，$r=\sqrt[3]{6\sqrt{2}}$

ゆえに，

$$A=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r\cdot 4=\sqrt{3}r^2=\sqrt{3}\sqrt[3]{36\cdot 2}=2\sqrt{3}\sqrt[3]{9}\fallingdotseq 7.21\cdots②$$

(3)　$V=r^3=1$ より，$r=1$

ゆえに，$A=6r^2=6\cdots③$

(4)　$V=\pi r^2\cdot 2r=2\pi r^3=1$ より，$r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

ゆえに，

$$A=\pi r^2\times 2+2\pi r\cdot 2r=6\pi r^2=6\pi\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}}=6\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}\fallingdotseq 5.54\cdots④$$

課題 5 の①，②，③，④から，体積が一定のときの表面積の大きさは，

正四面体の A＞立方体(正六面体)の A＞円柱の A＞球の A

となるので，球の表面積がいちばん小さくなるようだ。

しかし，これは具体的な幾つかの立体について，具体的に表面積を計算しただけなので，数学の証明にはなっていない。そこで，引き続き数学的に考えていく。

2. 大昔から知っていた？

実は，体積が一定のときの表面積が最小となる問題に似ている次のような問題は，キリストが生まれるよりも何世紀も前から，古代ギリシャやエジプトの数学者によって考えられていた。

［課題 5］等周問題

長さが一定の閉曲線の中で，その閉曲線で囲まれる面積を最大にするのは何か？

課題 5 を満たす曲線が円であることは，古代の人たちは直観的に認めていたし，現代の私たちもそうだろう。しかし，これは非常に深い問題であり，円であることを数学的に証明するには，たくさんの天才たちの貢献を経て，厳密な証明が得られたのはなん 19 世紀(！)になってからである。ついでに，平面上の 2 点を結ぶ曲線で長さが最小なのは直線であることの厳密な証明は，これもなんと 18 世紀(！)である。こんな直観的には明らかなことを厳密に証明しようと努力する数学(者)は素晴らしい！　と思うか，呆れた･･･と思うかは人によって違うだろうけれど，もう少し数学者の努力を見ていこう。

課題 5 の等周問題の起源は，ローマの詩人ヴェルギリウス(アウグストゥスと同時代の人)の叙事詩『アエネーイス』に書かれている，次のようなカルタゴ女王ディドーの物語まで遡ることができる。

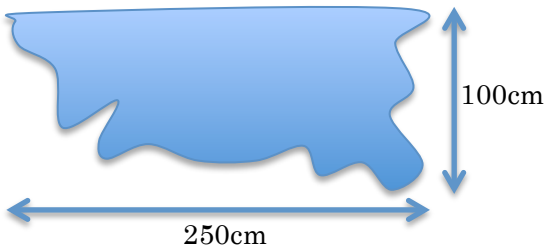
フェニキアの王女であったディドーは，彼女の夫を殺害した残忍な兄ピグマリオンから逃れるために海を渡り，北アフリカの現在チュニス湾と呼ばれるところに上陸した。ディドーは家臣とともに新しい国を築くために，その地の支配者ヌミディアのジャーバス王から土地を買おうとした。彼らが結んだ売買契約は，牛 1 頭分の皮で囲めるだけの土地を買うというものであった。ヌミディアの人たちは冗談だと思い一笑に付したが，最後に笑ったのはディドーであった。

［課題 6］ディドーの問題

ディドーは，牛 1 頭分の皮で囲めるできるだけ広い土地を得ようとして，どのような方策を考えたか？　また，その結果として，どれ位の大きさの土地を得ることが出来たか？

ディドーは，右図のような牛半頭分の皮 2 枚から，幅 2.5mm の何本もの紐を切り取り，それらをつなぎ合わせて 1 本のロープを作った。

［問 3］そのロープの長さを求めよ。



ディドーは，真っ直ぐな海岸線を一方の境界として，出来上がった 2km のロープで半円形に土地を囲い込んだ。彼女は，面積が最大になるのは土地の形が半円形のときであることを知っていたに違いない。このようにして，古代都市カルタゴは出来上がった（右図は現在の博物館にある想像図)。



［問 4］ディドーが手に入れた半円形の土地の半径とその面積を求めよ

3. 等周問題は解決？

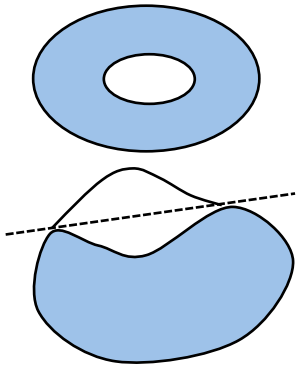
さて，ディドーの問題を数学的に書きなおすと，次のようになる。

［定理 3］ディドーの問題
定直線 L 上の 2 点を，一定の長さの曲線で結ぶとき，領域の面積が最大になる曲線 C は半円である。

(証明)　スイス人数学者シュタイナー(1796～1863)

まず，C は凸図形でなければならない。

なぜなら，C が凸図形でないとすると，右図のような図形となる。



(i)　穴が開いているとき

穴を取り除くことにより，周の長さが短くなり面積は大きくなる。

(ii)　凹んでいる部分があるとき

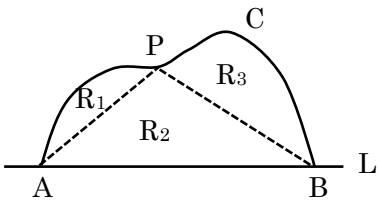
接線に関して対称に折り返すことにより，周の長さは同じで面積は大きくなる。

いずれにしても条件を満たさないので，C は凸図形でなければならない。

さて，右上図において C は半円ではないとすると，C 上の点で，

$$\angle APB \neq 90^\circ \quad \cdots①$$

なる点 P が存在する(注 1)。領域を弦 AP，BP で 3 つの部分に分割して，それぞれ R_1，R_2，R_3 とする。



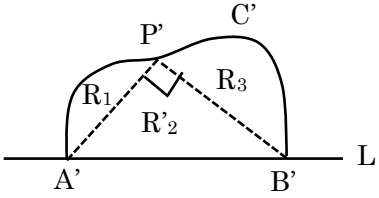
ここで，AP，BP を硬い棒だと思い，

$$\angle A'P'B' = 90° \cdots②$$

となるように，点 A を A’，B を B’に移動させる。このとき，点 P は P’に移動し，

$$AP = A'P',\ BP = B'P' \cdots③$$

となる。この移動の結果，曲線 C は C’に移動したとする。



③より，R_1，R_3 は変化することなく弦 A’P’，B’P’の上に移動し，R_2 は R_2’に移動している。

ここで，①，②，③より，

$$\triangle APB=\frac{1}{2}AP\cdot BP\sin\angle APB<\frac{1}{2}A'P'\cdot B'P'\sin 90^\circ =\triangle A'P'B'$$

であるから，任意の曲線 C を

C の周の長さ＝C'の周の長さ，C と L で囲む面積＜C'と L で囲む面積･･･④

を満たす曲線 C'に変形することができる(注 2)。

④のような，周の長さが変わらずに面積が増加するような変形を受けない曲線は，半円に限る(∵　C が半円なら①を満たすような点 P は存在しないから)。

よって，領域の面積が最大になるのは，C が半円のときである。

(Q.E.D.)

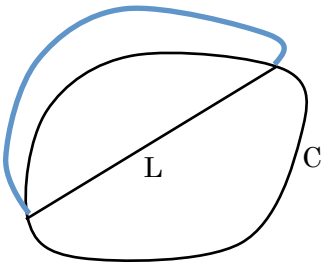
(注 1)　曲線上の任意の点 P について∠APB＝90°となるのは円だけであることを示す必要があるが，その証明は省略する。

(注 2)　移動することで領域 R_1, R_3 が重なることはないのであるが, その説明は省略する。

［定理 4］

曲線 C を等周問題の解となる図形とすると，C 上の 2 点を結ぶ弦で周を 2 等分するものは，面積も 2 等分する。

(証明)



このような弦 L が，面積を 2 等分しないとすると，面積の大きい方を L に関して対称に折り返してできる図形は，周の長さは同じであるが，面積は大きくなる。

これは，C が等周問題の解であることに矛盾する。

よって，L は面積も 2 等分する。

(Q.E.D.)

(注)　C 上の 2 点を結ぶ弦で周を 2 等分するものが存在することは，実は証明が必要であるが，省略する。

以上で，等周問題のシュタイナーの証明の準備が出来上がった。

［定理 5］等周問題

長さが一定の閉曲線の中で，その閉曲線で囲まれる面積を最大にするのは円である。

(証明)　シュタイナー

等周問題の解となる図形 C が与えられたとして，C の周を 2 等分する弦 L を描き，C を 2 つの図形 C_1, C_2 に分割する。C_1, C_2 は弦 L を共有しているので周の長さは同じであり，定理 4 より面積も同じである。

ここで，C_1, C_2 の(同じ)面積を最大にすれば，C の面積は最大になる。定理 3 より，C_1, C_2 の(同じ)面積が最大になるのは，C_1, C_2 が半円のときであるから，C は円である。

(Q.E.D.)

以上で，シュタイナーは見事なアイデアで等周問題を解決したように思える。しかし，実はこの証明には欠陥がある。

［問 5］シュタイナーの証明の，数学的欠陥を述べよ。

シュタイナーの証明は，

等周問題の解となる曲線の存在を，証明なしに仮定している

ことが数学的にはダメであると，同時代のドイツ人数学者ディリクレ(1805～1859)に指摘されていた。これに対してシュタイナーは，解が存在するのは明らかであると反論した。大多数の人は，シュタイナーと同じように考えるだろう。しかし，幾何学の問題では，解が存在するのは明らかに見えても，実は解が存在しない問題はいくらでもある。

［例］

周の長さが 1 より小さい凸図形の中で，面積が最大のものを見つけよ。

［解］

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，周囲の長さが $1-\varepsilon$ の凸図形 C を考える。C を周の長さが $1-\frac{1}{2}\varepsilon$ である相似な図形 C_1 に相似拡大すると，C_1 の周の長さは 1 より小さく，面積は C よりも大きい。この操作を繰り返すと，周の長さが $1-\frac{1}{2^n}\varepsilon$ (n=1，2，･･･)と 1 より小さく，面積が増加する凸図形の無限列が得られる。

すなわち，周の長さが 1 より小さい凸図形で面積が最大となるものは存在しない。

このような数学の厳密性に美しさを観るか，めんどくさい学問だと感じるか，これも人によって様々だろう。

閑話休題。古代から等周問題とその解がよく知られていたことは，例えば下図のような中世における都市の城壁の形を見ても分かる。



現在のケルン市街



中世都市ネルトリンゲン

4. 双対性

解決した等周問題に関して，次の定理が成り立つ。

［定理 6］双対性

平面上の閉曲線の周の長さを L，閉曲線が囲む領域の面積を A とし，2 つの命題を

P：L が一定のとき，A が最大となる閉曲線は円である。

Q：A が一定のとき，L が最小となる閉曲線は円である。

とすると，P と Q は同値(P⇔Q)である。

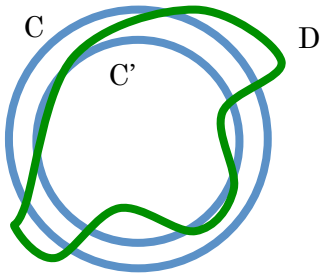
(証明)

(i)　P⇒Q の証明

Q でないと仮定すると，面積 A の円 C に対して，ある曲線 D が存在して，

$A_D = A_C = A$，$L_C > L_D$

を満たす。



ここで，円 C を周の長さが D と同じになるまで縮小し，その円を C’とすると，

$L_{C'} = L_D$，$A_{C'} < A_C = A_D$

となるが，これは仮定の命題 P の主張である

$A_{C'} > A_D$

に矛盾する。

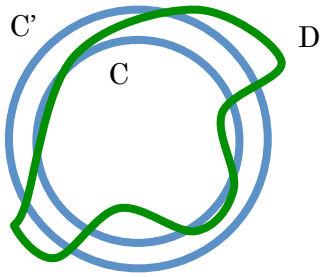
よって，P⇒Q は成立する。

(ii)　Q⇒P の証明

P でないと仮定すると，周の長さ L の円 C に対して，ある曲線 D が存在して，

$L_D = L_C = L$，$A_C < A_D$

を満たす。



ここで，円 C を面積が D と同じになるまで拡大し，その円を C’とすると，

$A_{C'} = A_D$，$L_{C'} > L_C = L_D$

となるが，これは仮定の命題 Q の主張である

$L_{C'} < L_D$

に矛盾する。

よって，Q⇒P は成立する。

以上より，P⇔Q である。

(Q.E.D.)

命題 P は等周問題の解であり，真であることを証明したので，命題 Q も真である。

そこで，命題 Q の次元を 1 つ上げると，次の定理が成り立つ。

［定理 7］シャボン玉

同じ体積を囲む閉曲面の中で，表面積が最小となるのは球である。

5. 変分法

定理 7 が成り立つことを数学的に厳密に証明するには，**変分法**という数学が必要となる。変分法は，イギリスの天才数学者ニュートン(1642～1727)とドイツのこれまた天才数学者ライプニッツ(1646～1716)が発見した**微分法**の兄貴分，とでも言うべき数学である。微分法と変分法の違いを，具体例で見てみよう。

［課題 7］微分法

4 辺の長さの和が 4 である長方形のうち，面積が最大のものは何か？

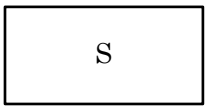
長方形の縦の長さを x，面積を S とすると，

$$S=x(2-x)=-x^2+2x$$

よって，

$$\frac{dS}{dx}=-2x+2=2(1-x)$$

$\frac{dS}{dx}=0$ とすると，$x=1$



x	0	･･･	1	･･･	2
$\frac{dS}{dx}$		＋	0	－	
S		↑	極大 1	↓	

増減表より，S は x＝1 で最大値をとる。

よって，面積が最大となるのは，正方形のときである。

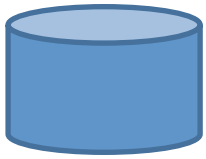
このように，一般的にいうと，

関数 f(x)が極値をとる x の値を求める方法が微分法

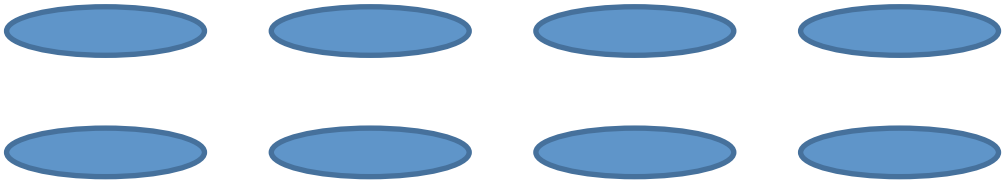
である。

［課題 8］変分法

右図のような，底面の半径が 1，高さが 1 の円柱形の容器がある。この容器の表面に塗料を塗りたい。塗料の量が最も少なくなるように容器の側面の形を変えるとき，その形はどうなるか？



［貴方の予想］



塗料の量を最小にするには，容器の側面の表面積を最小にすればよい。

課題 7 においては，S が最大となる x の値は，x を少し変化させても S はほとんど変化しない，つまり変化率が 0 となる($\frac{dS}{dx}=0$)ことから求められる。これと同様の考え方で，課題 8 を満たす側面の曲線 f(x)があるとして，f(x)をどのように変形しても表面積は増えるが，表面積の変化率は f(x)で 0 になっているはずである。つまり，表面積が最小になる f(x)では，曲線を少し変化させても表面積はほとんど変化しないはずである。

このように，

表面積が極値をとる曲線(関数)f(x)を決定する方法が変分法

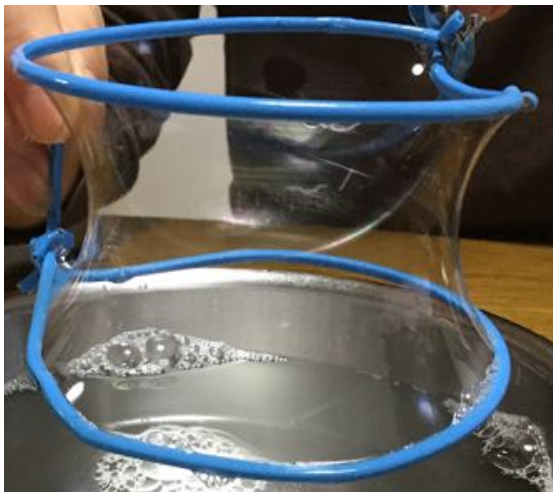
である。

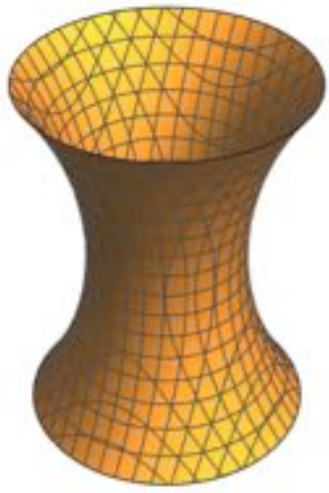
微分法と変分法の違いは，簡単に言うと，

変分法は，変形の仕方に無限のバリエーションがある

ことである。課題 8 においては，側面を表す曲線 f(x)としては直線，放物線などありとあらゆる曲線が考えられるのである。その中で，表面積を最小にする曲線(関数)を求める方法が変分法なのである。

ここで，実はシャボン膜(自然)は，またまた答えを知っているのである。





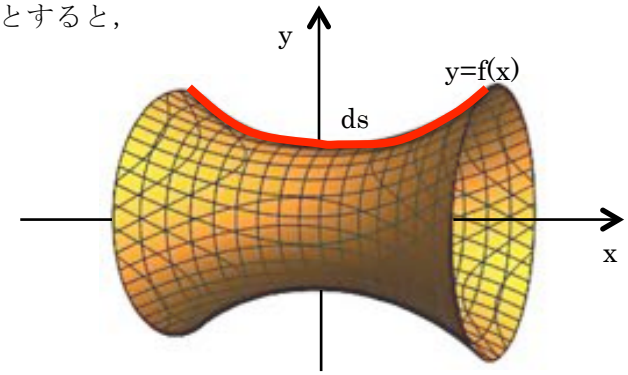
この曲面は，懸垂曲面と呼ばれる曲面であり，カテナリーという曲線を回転させて得られる。この曲面が表面積最小となることを，次の問いに従って数学的に示そう。

［問 6］

(1)　課題 8 の立体の側面を表す曲線を $y=f(x)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$，$f(-1)=f(1)=2$ とし，この曲線の微小部分の長さを ds とする。曲線 y=f(x)を x 軸の周りに 1 回転したとき，この微小部分が掃く曲面の微小部分の面積を dA とすると，

$$dA=2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

であることを説明せよ。



(2)　この円柱状の立体の側面積は，

$$S=2\pi\int_{-1}^{1} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

であることを説明せよ。

(3)　変分法を用いると，側面積 S を最小にする関数 y は，微分方程式

$$y\,y''=1+(y')^2\cdots(*)$$

を満たすことが分かる。このとき，関数

$$y=f(x)=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}\cdots(☆)\quad (a \text{ は定数})$$

は，(*)を満たすことを示せ。

※シャボン膜の右横の図は，(☆)において a=0.589 の $y=f(x)$ を回転したものである。